أساسيات الاقتصاد الرياضي

إعداد

د. عبد العالي بوحويش الدايخ

د. خالد خميس الصادق

د. يحيى محمود محمد

منشورات جامعة عمر المختار

البيضاء - ليبيا

2022

أساسيات الاقتصاد الرياضي

إعداد

د. عبد العالي بوحويش الدايخ

أستاذ الاقتصاد الزراعي المساعد

د. خالد خميس الصادق

أستاذ الاقتصاد الزراعي المساعد

د. يحيى محمود محمد

أستاذ الاقتصاد الزراعي المساعد

منشورات جامعة عمر المختار – البيضاء- 2022

اسم الكتاب : مقدمة في الاقتصاد الرياضي.

اسم المؤلفون : عبد العالي بوحويش / خالد خميس / يحيى محمود.

رقم الإيداع : 2017/105م.

دار الكتب الوطنية بنغازي – ليبيا

منشورات

جامعة عمر المختار

البيضاء

الترقيم الدولي

ردمك ISBN 978-9959-79-099-6

بسم الله الرحمن الرحيم

قَالَ رَبِّ اشْرَحْ لِي صَدْرِي (25) وَيَسِّرْ لِي أَمْرِي (26)

وَاحْلُلْ عُقْدَةً مِّن لِّسَانِي (27) يَفْقَهُوا قَوْلِي (28)

صدق الله العظيم

الآيات 25، 26، 27، 28، من سورة طه

الإهداء

إلى أبائنا وأمهاتنا من كان منهم حياً أطال الله في عمره ومن فارق منهم الحياة نأمل من الله له واسع المغفرة وأن يجعل الله هذا العمل المتواضع صدقة جارية له في ميزان حسناته وجزأهم الله عنّا جميعاً خير الجزاء.

المحتويات

الفصل الثالث : التطبيقات الاقتصادية للمحددات والمصفوفات

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

"وما أتيتم من العلم إلا قليلاً "

في إطار تقديم الخدمة لأبنائنا طلاب المرحلة الجامعية وتأكيداً بأن علاقة العلوم ببعضها البعض الإنسانية منها والتطبيقية وإيضاح أن العلوم التي قد يرى طلاب المراحل التعليمية الأولى أنها علوم جافة لا فائدة ترجى من تعلمها في بداية عمرهم ، وربما لعدم دراية أيضاً من القائمين بتدريسها بتوضيح أهميتها في المستقبل ، وفى مراحل علمية متقدمة وهنا على سبيل المثال لا الحصر علم الرياضيات الذي يلخص موضوع إنشائي طويل في معادلة رياضية (نموذج رياضي أو دالة رياضية أو علاقة رياضية) وهو علم قديم قدم الإنسانية وبتطور العصور ووجود المشكلة الاقتصادية في العصر الحديث ظهر علم جديد هو علم الاقتصاد كان في البداية يغلب عليه الجانب النظري ولكن لم يتأخر علماؤه الأوائل من مالتس وكورنو وغيرهم في ربطة بالرياضيات من أجل إعطاء العلاقات الاقتصادية صورة أكثر قوة وإيجاد حلول للمشاكل الاقتصادية وبوجود حدود مشتركة مع الرياضيات من أجل وضع خطط أكثر مصداقية لتصب في مصلحة المجتمع وهو الهدف لدى كل من يعمل في حقل الاقتصاد وهذا كله أوجد ما يعرف بعلم الاقتصاد الرياضي.

ونظراً لاطلاع المؤلفين على العديد من المراجع في هذا الشأن ورغبة منا في الوصول للهدف وترغيب الطلبة في دراسته والتقليل كلما أمكن من تكرار مواضيع سبق دراستها من

مبادئ الاقتصاد أو الاقتصاد الجزئي .... وغيرها من المواضيع التي يتم فيها الربط بين الاقتصاد والرياضيات فقد تم التركيز على المواضيع التي نرى إنه يفضل دراستها وتوضيح الالتقاء بين الاقتصاد والرياضيات لحل المشكلة الاقتصادية وتوضيح الصورة أمام الطلاب عند وضع السياسات الاقتصادية، بالإضافة إلى عدم الإطالة والسرد المطول كما في مراجع أخرى ولمعرفة أن مدة العام الدراسي محددة وإنه لو تم سرد هذه الموضوعات بالتفصيل لأستغرق ذلك مجلدات، ونأمل من الله تعالى أن يكون هذا الكتاب وسيلة لفائدة أبنائنا الطلاب من أجل الوصول إلى غايتهم في قسم الاقتصاد وأن تكون لديهم أداة يستطيعون من خلالها اتخاذ القرار الاقتصادي الصحيح.

والله ولى التوفيق

المعدون

الفصل الأول

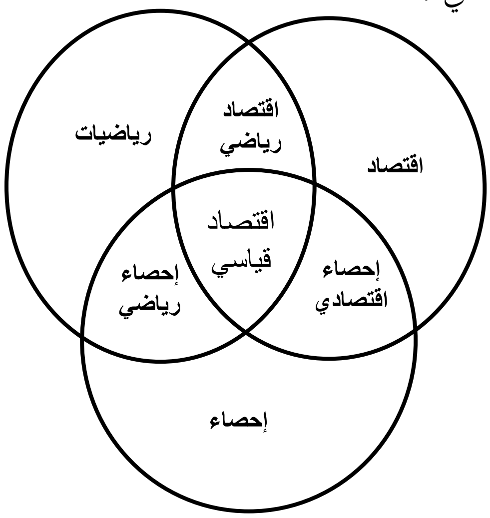
ماهية الاقتصاد الرياضي

الفصل الأول

ماهية الاقتصاد الرياضي

تعريف علم الاقتصاد الرياضي

لو جاز تمثيل العلاقة بين علم الاقتصاد وعلم الرياضيات وعلم الإحصاء بهذا الشكل فإنه يلاحظ التالي :



شكل رقم (1 – 1) العلاقة بين علم الاقتصاد وعلم الرياضيات وعلم الإحصاء

وجود حدود مشتركة بين النظرية الاقتصادية والرياضيات وهذا أوجد ما يعرف بعلم الاقتصاد الرياضي، حيث يهدف هذا العلم إلى دراسة العلاقة بين فرعين من فروع المعرفة هما الاقتصاد بشقيه النظري والتطبيقي والرياضيات بشقيها البحتة والتطبيقية. كما يهتم بصيغة العلاقات الاقتصادية بأسلوب رياضي مستخدماً في ذلك مختلف العناصر والأدوات الرياضية.

-كما يتم استخدام المنهج الرياضي في التحليل الاقتصادي أي التعبير عن المتغيرات الاقتصادية بالرموز وإظهار المعادلات الاقتصادية على شكل معادلات رياضية وحل هذه المعادلات ومعالجتها بأسلوب رياضي الذي يمكن من التوصل إلى نتائج محددة ويهتم علم الاقتصاد الرياضي بدراسة النظرية الاقتصادية في صورتها الرمزية بدلاً من الأسلوب اللغوي حتى يسهل مطابقتها مع الواقع الفعلي.

المنهج العلمي : هو استخدام المنطق والموضوعية في التحليل الاقتصادي.

أهمية استخدام الرياضيات في التحليل الاقتصادي

1. الأدوات الرياضية بصورها المختلفة سواء كانت حسابية أو جبرية أو هندسية تصلح كوسيلة من وسائل الإيضاح للتعبير عن حالات تعجز الألفاظ عن شرحها. ويمكن تفسير ذلك من خلال المثال التالي:

$$D = a - b\,p$$

حيث أن D هي الكمية المطلوبة لسلعة ما وكل من a . b ثوابت و p تمثل السعر لتلك السلعة.

2. صياغة النظرية الاقتصادية صياغة رياضية تضفي على الفروض والتعريفات نوع من الصلابة وتجعل هذه الفروض واضحة وصريحة في كل مرحلة من مراحل التحليل.

المتغيرات المنتظمة والعشوائية :

المتغيرات المنتظمة: هي التي تدخل في النموذج بصورة واضحة وصريحة وتعبر عن مفهوم محدد .

المتغيرات العشوائية: هي تلك المتغيرات التي لا تظهر في المعادلة بصورة واضحة ولا تعبر عن متغيرات واضحة ومحددة.

المتغيرات الداخلية والخارجية :

المتغيرات الداخلية: هي المتغيرات التي تتحدد كميتها أو قيمتها داخل النموذج.

المتغيرات الخارجية: هي المتغيرات التي تتحدد كميتها أو قيمتها بعوامل أخرى خارج النموذج موضوع الدراسة .

المعادلات :

تسمى المعادلات التي يتكون منها أي نموذج بالمعادلات الهيكلية وتنقسم إلى :

1. **المعادلات السلوكية :**

وهى نوع من المعادلات التي تبين علاقة دالية بين المتغيرات المختلفة وتكون هذه العلاقة ناشئة أساساً عن سلوك معين من جانب الأفراد أو جانب المتغيرات المختلفة التي تؤثر على الدالة وتظهر ردود أفعالهم نتيجة للتغيرات التي تحدث في بعض المتغيرات.

2. **المعادلات التعريفية :**

وهي نوع من المعادلات الذي يعرف وضعاً معيناً أو يعرف متغيراً معيناً أو يعطي قيمة محددة لأحد المتغيرات

مثال: يحدث التوازن عندما تتساوى الكمية المطلوبة مع الكمية المعروضة أي عندما:

$$Q_{\mathrm{d}} = \mathrm{Q_s}$$

مثل تلك المعادلة لا تظهر سلوكاً معيناً أو رد فعل ولكنها تكتفي بتعريف حالة التوازن بأنها تلك الحالة التي تتساوى فيها الكمية المطلوبة مع الكمية المعروضة .

مثال أخر :

$$Y = I + C$$

حيث Y يمثل الدخل ، I يمثل الاستثمار ، C يمثل الاستهلاك .

فإن هذه المعادلة لا تظهر سلوكاً معيناً ولكنها تكتفي بتعريف الدخل القومي أنه يساوي مجموع ما ينفق على الاستهلاك وعلى الاستثمار.

3. المعادلات الفنية :

وهي تبين علاقات فنية بحتة بين المتغيرات مثل الخدمات اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من سلعة معينة .

النماذج الاحتمالية وغير الاحتمالية :

1. النماذج غير الاحتمالية :

هي ذلك النوع الذي يبين وجود علاقات تامة بين المتغيرات المختلفة في النموذج.

فمثلاً كتابة دالة الطلب لسلعة ما على الصورة:

$$D = -2P + 100$$

هذا النموذج يعني أنه إذا كان سعر السلعة هو 10 فالكمية المطلوبة هي 80 وهنا يمكن تحديد الكمية المطلوبة المقابلة لأي سعر وقد تزيد الكمية المطلوبة أو تقل عن هذا المقدار.

2. النماذج الاحتمالية :

نتيجة لوجود متغيرات عشوائية ولذلك يفضل في الكتابة كتابة النموذج السابق على الصورة الآتية.

$$D = -2\ P+100\ +e$$

حيث e متغير عشوائي، يمكن أن يؤثر على الكمية المطلوبة بالزيادة أو النقصان والنماذج التي تدخل فيها مثل هذه المتغيرات العشوائية هي ما تسمى بالنماذج الاحتمالية ومثل هذا النوع من النماذج هو ما يهتم به فعلاً في الدراسات القياسية (الاقتصاد القياسي).

تحليل نقطة التوازن

نقطة التوازن هي نقطة تقاطع منحنى الطلب مع منحنى العرض والتي يتحدد من خلالها السعر والكمية التوازنية .

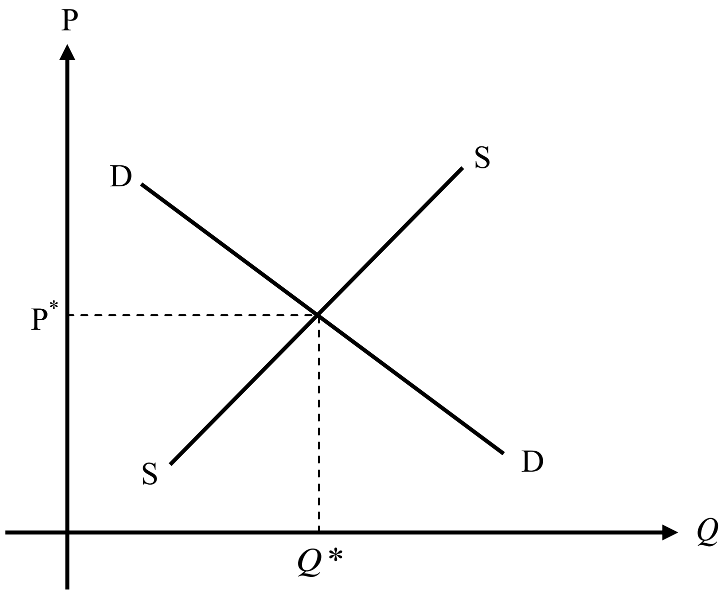
ويمثل ذلك بيانيا كما يلي :

إذا كانت

دالة الطلب $D = a - bp$

دالة العرض $S = C + dp$

عند شرط التوازن الكمية المطلوبة = الكمية المعروضة بمعنى $Q_d = Q_S$



شكل (1 − 2) نقطة التوازن بين الطلب والعرض

مثال (1):

قدر سعر وكمية التوازن من دالتي العرض والطلب الآتيتين

$$D = 3 - 4P \quad , \quad S = 1 + P$$

الحل

عند التوازن

$$Q_d = Q_S$$

$$3 - 4P = 1 + P$$

$$3 - 1 = P + 4P$$

$$2 = 5P$$

السعر التوازني $\bar{P} = \frac{2}{5} = 0.4$

لإيجاد الكمية التوازنية يتم التعويض في إحدى الدالتين.

$$Q_d = 3 - 4\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$Q_d = 3 - \frac{8}{5}$$

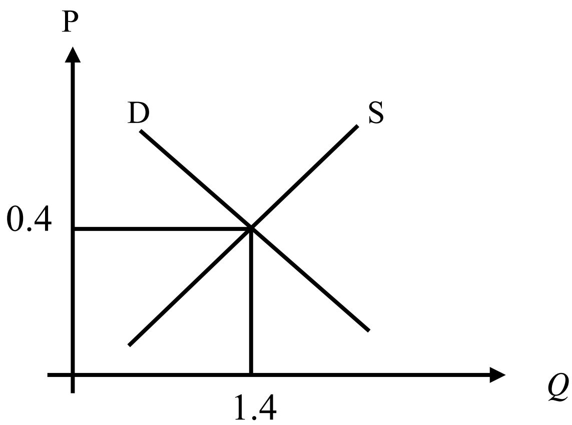
$$Q_d = \frac{15-8}{5}$$

$$Q_d = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5} = 1.4$$

$\therefore$ الكمية التوازنية هي $1.\frac{2}{5}$

$$Q_s = 1 + \frac{2}{5}$$

$$Q_s = 1\frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1.4$$



مثال (2):

أوجد السعر التوازني والكمية التوازنية إذا كانت دالتي الطلب والعرض كالآتي

$$Q_S = 2 + P \,, \; Q_d = 10 - 0.5\,P$$

الحل:

$$Q_S = 2 + P$$

$$Q_d = 10 - 05\,P$$

$$10 - 0.5\,P = 2 + P$$

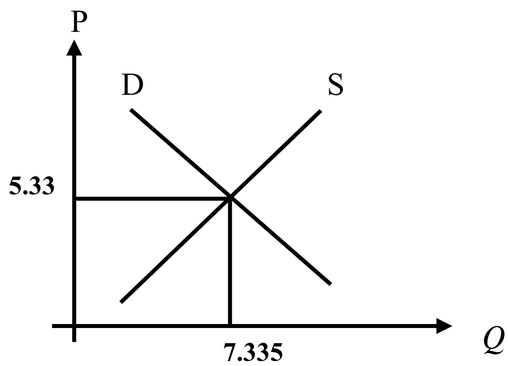
$$8 = 1.5\,P$$

$P = \frac{8}{1.5} = 5.33$ السعر التوازني

لإيجاد الكمية التوازنية نعوض في إحدى الدالتين $Q_d = Q_s$

$$Q_d = 10 - 0.5\,(5.33) = 10 - 2.665$$

$$Q_d = 7.335$$



أثر فرض ضريبة أو تقديم دعم على التوازن السوقي

هناك نوعين من الضرائب :

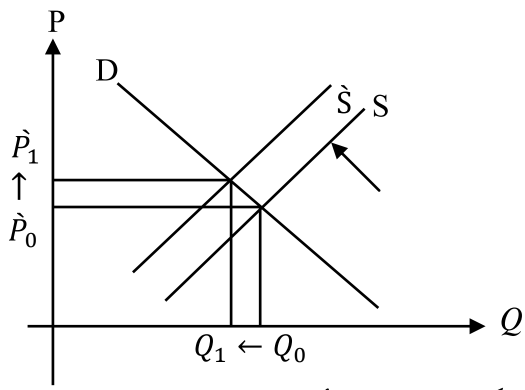
أ. **ضريبة نوعية:** وتفرض بمعدل مبلغ نقدي معين على كل وحدة مثل فرض 1/4 دينار على كل علبة سجائر منتجة.

ب. **ضريبة نسبية:** تفرض في صورة نسب معينة على سعر كل وحدة من وحدات الإنتاج مثل فرض 5 % على كل علبة سجائر منتجة.

أثر فرض الضريبة على التوازن السوقي

تؤثر في البداية على المنتج فيقل العرض نتيجة لفرض ضريبة فينتقل تبعاً لذلك منحنى العرض جهة اليسار أي يقل العرض مما يؤدي إلى قلة الكمية المعروضة (المنتجة)$\bar{Q}$ وزيادة السعر التوازي P'.

نتيجة لفرض الضرائب $\bar{Q}\downarrow$ $\bar{p}\uparrow$



شكل رقم (1-3) أثر فرض الضريبة على التوازن السوقي

$$Q_d = a - bp$$

$$Q_s = c + dp$$

لو تم افتراض أن يكون رمز الضريبة هو t فعند التوازن بعد فرض الضريبة .

$$Q_d = Q_s$$

$$a - bp = c + d(p - 1)$$

أما عن حصيلة الضريبة ومعدل الضريبة النوعية الأمثل فيمكن أن يتم معرفة ذلك

من خلال المثال التالي:

مثال (1) :

إذا علمت أن الطلب والعرض في السوق لسلعة ما كما يأتي :

$$Q_d = 10 - p$$

$$Q_s = 2P - 5$$

المطلوب :

1. إيجاد سعر وكمية التوازن قبل فرض الضريبة .
2. إذا فرضت ضريبة نوعية بمعدل 1 دينار للوحدة المباعة أوجد التوازن الجديد .
3. أحسب معدل الضريبة الأمثل والسعر والكمية المقابلين وحصيلة الضريبة .
4. ما هي الآثار الاقتصادية لفرض ضريبة على التوازن السوقي؟.

الحل:

عند شرط التوازن فإن $Q_d = Q_s$ (1)

$$10 - P = 2P - 5$$
$$10 - 5 = 2P + P$$
$$15 = 3P$$

$$P^* = 5$$

لإيجاد الكمية التوازنية يتم التعويض في إحدى المعادلتين Q_s أو Q_d كالتالي:

$$Q_d = 10 - P$$

$$Q_d = 10 - 5$$

$$Q_d = 5$$

$$Q_s = 2(5) - 5$$

$$= 5$$

إذا فرضت ضريبة نوعية بمعدل 1 دينار للوحدة المباعة، فإن الكمية والسعر التوازنيين

يكون تقديرهما :

$$Q_d = Q_s \qquad (2)$$

$$10 - P = 2(P - 1) - 5$$

$$10 - P = 2P - 2 - 5$$

$$10 - P = 2P - 7$$

$$10 + 7 = 3P$$

$$3P = 17$$

$$P = \frac{17}{3} = 5.667$$

وبالتالي بالتعويض في دالة الطلب مثلاً ستكون الكمية التوازنية الجديدة

$$Q_d = Q_s$$

$$10 - 5.667 = 4.333$$

(3) للحصول على معدل الضريبة الأمثل والسعر والكمية المقابلة وحصيلة الضريبة يتم افتراض ضريبة بمعدل t وبالتالي فإن التوازن الجديد للكمية والسعر يكون كالآتي.

السعر المتوازي عند المعدل الأمثل هو:

$$Q_d = Q_s$$

$$10 - P = 2(P - t) - 5$$

$$10 - P = 2P - 2t - 5$$

$$10 - 5 = 3P - 2t$$

$$15 + 2t = 3P$$

$$p = \frac{15+2t}{3}$$

$$\bar{p} = 5 + \frac{2}{3}t$$

والكمية التوازنية عند المعدل الأمثل هي :

$$\overline{Q} = 10 - \left(5 + \frac{2}{3}t\right)$$

$$\overline{Q} = 10 - 5 - \frac{2}{3}t$$

$$\overline{Q} = 5 - \frac{2}{3}t$$

بما أن حصيلة الضريبة (T)

$$T = t\,\overline{Q}$$

$$T = t\left(5 - \frac{2}{3}t\right)$$

$$T = 5\,t - \frac{2}{3}t^2$$

وتبلغ T نهايتها العظمى (الضريبة المثلى) عندما يتم إتباع خطوات إيجاد نقاط النهايات العظمى عن طريق إجراء المشتقة الأولى وكالتالي:

$$\frac{dT}{dt} = 5 - \frac{4}{3}t = 0$$

$$5 = \frac{4}{3}t \Rightarrow t = 5 \times \frac{3}{4} \Rightarrow t = 3.75$$

ثم بإجراء المشتقة الثانية لمعرفة ما إذا كانت تلك القيمة تعطي نهاية عظمى وكالتالي:

$$\frac{d^2\mathrm{T}}{\mathrm{dt}^2} = \frac{-4}{3} = -1.33 < 0$$

وحيث أن القيمة المتحصل عليها سالبة 1.33−

∴ يتحقق شرط النهاية عظمى لتلك الدالة.

∴ بفرض المخطط الاقتصادي لضريبة نوعية مقدارها $\frac{15}{4} = 3.75$ وحدة نقدية يتم الحصول على أكبر حصيلة ضريبية نتيجة لأن معدل الضريبة الأمثل هو 3.75 .

وعندها يصبح تقدير كل من $\overline{Q}$, $\overline{p}$ كالآتي :

السعر التوازني الأمثل $\overline{P} = 5 + \frac{2}{3}t$

$$\overline{p} = 5 + \frac{2}{3}\left(\frac{15}{4}\right)$$

$$\overline{p} = 5 + \frac{5}{2}$$

$$\overline{p} = 7.5$$

أما الكمية التوازنية المثلى هي: $\bar{Q} = 5 - \frac{2}{3}t$

$$\overline{Q} = 5 - \frac{2}{3}\left(\frac{15}{4}\right)$$

$$\overline{Q} = 5 - \frac{5}{2} = 5 - 2.5 = 2.5$$

وفي هذه الحالة، فإن حصيلة الضريبة يمكن حسابها كالتالي:

$$T = t.\ \overline{Q}$$

$$= \frac{15}{4} \times \frac{5}{2} = 3.75 * 2.5 = 9.375$$

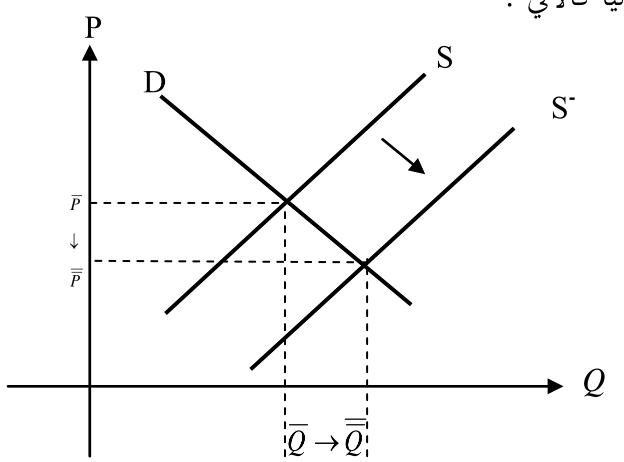
(4) الآثار الاقتصادية لفرض الضريبة

	قبل فرض الضريبة	بعد فرض الضريبة النوعية بمقدار **1** دينار	الضريبة المثلى	الأثر الاقتصادي لفرض الضريبة
السعر التوازني $(\bar{p})$	5	5.667	7.5	↑ زيادة السعر التوازني
الكمية التوازنية $(\bar{Q})$	5	4.333	2.5	↓ نقص الكمية التوازنية

أثر تقديم دعم (إعانة) على التوازن السوقي:

يستفيد منها المنتج أي تضاف إلى سعر العرض ويتم تطبيق عليها نفس الطريقة السابقة التي تمت بها معالجة الضرائب، أي سيؤدي تقديم الإعانة إلى انتقال منحنى العرض إلى اليمين (زيادة) مما يؤدي إلى زيادة الكمية المعروضة وانخفاض السعر.

وتمثل بيانياً كالآتي :



شكل (1–4) تأثير الإعانة على الكمية والسعر التوازنيين

أي أنه في حالة قلة الإنتاج وارتفاع الأسعار يمكن تقديم إعانة للمنتج أي لمستلزمات الإنتاج.

مثال (1):

بين أثر منح إعانة إنتاج مقدارها الوحدة على الأسعار والكميات التوازنية علماً بأن دالتي الطلب والعرض على النحو التالي:

$$Q_d = 10 - P \quad , \quad Q_s = -2 + 2p$$

الحل

$$Q_d = Q_s$$

$$10 - p = -2 + 2p$$

$$12 = 3P$$

$$P = 4$$

بالتعويض في إحدى الدالتين بقيمة $P = 4$ نتحصل على الكمية التوازنية

$$Q_s = -2 + 2(4)$$

$$Q_s = -2 + 8$$

$$Q_s = 6$$

عند تقديم دعم مقداره الوحدة، فإن ذلك يؤدي إلى التغير في السعر والكمية التوازنيين كالتالي:

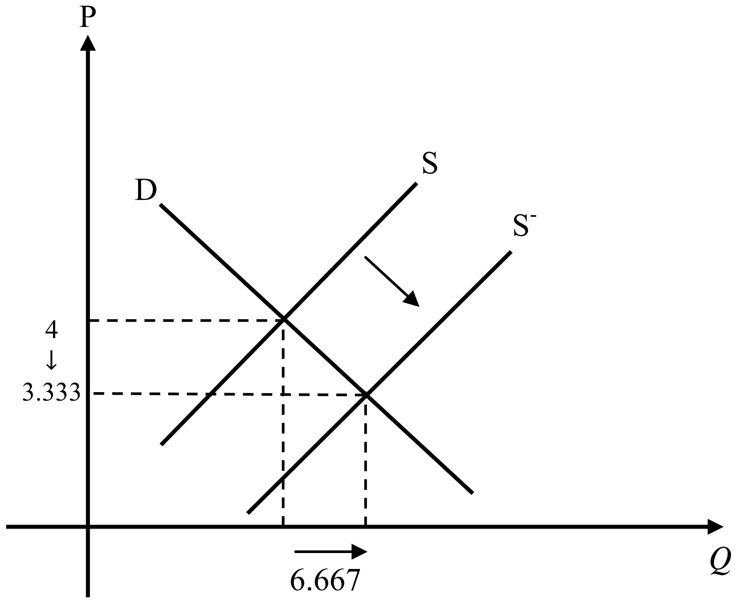
$$10 - P = -2 + 2(P + 1)$$

$$10 - P = -2 + 2P + 2$$

$$10 = 3P$$

$$P = \frac{10}{3} = 3.333$$

$$Q_d = 10 - 3.333 = 6.667$$



	قبل الدعم	بعد الدعم
السعر التوازني P	4	↓ 3.333
الكمية التوازنية Q	6	↑ 6.776

مثال (2):

إذا علمت أن دالتي العرض والطلب لمحصول القمح في السوق كانتا على النحو التالي:

$$Q_d - 27 + 3P = 0$$

$$Q_s = -9 + 6P$$

مستعيناً بالرسم في جميع الحالات .

(1) قدر سعر وكمية التوازن قبل فرض الضريبة والإعانة.

(2) إذا فرضت ضريبة نوعية بمعدل 1 وحدة نقدية للوحدة المباعة أوجد التوازن الجديد (يتم طرح 1 من السعر للكمية المعروضة Q_S).

(3) بين أثر تقديم دعم للمنتج قدره 2 وحدة نقدية للوحدة المباعة أوجد التوازن الجديد (يتم إضافة 2 لسعر الكمية المعروضة) .

(4) أحسب معدل الضريبة الأمثل والسعر والكمية المقابلتين لتلك الضريبة وما هي حصيلتها.

(5) ما هي الآثار الاقتصادية لفرض ضريبة أو تقديم إعانة على التوازن السوقي (الأثر الاقتصادي) ؟

الحل

نضع الدالتين في الصورة النموذجية

$$Q_d = a - bp \qquad Q_s = c + dp$$

$$(1) \qquad Q_d = 27 - 3p \quad , \quad Q_s = -9 + 6p$$

$$\because \; Q_d = Q_s$$

$$\therefore \; 27 - 3p = -9 + 6p$$

$$36 = 9p$$

$$p = \frac{36}{9}$$

السعر التوازني $p = 4$

بالتعويض في إحدى الدالتين للحصول على الكمية التوازنية قبل فرض الضريبة والإعانة.

$$Q_d = 27 - (3)(4)$$

$$Q_d = 27 - 12$$

$$Q_d = 15$$

(2) أثر فرض ضريبة نوعية بمعدل 1 وحدة /نقدية للوحدة المباعة

$$27-3p = -9+6(p-1) \qquad (2)$$

$$27-3p = -9+6p-6$$

$$27-3p = -15+6p$$

$$42 = 9p$$

$$p = 42/9$$

$$P = 4.7$$

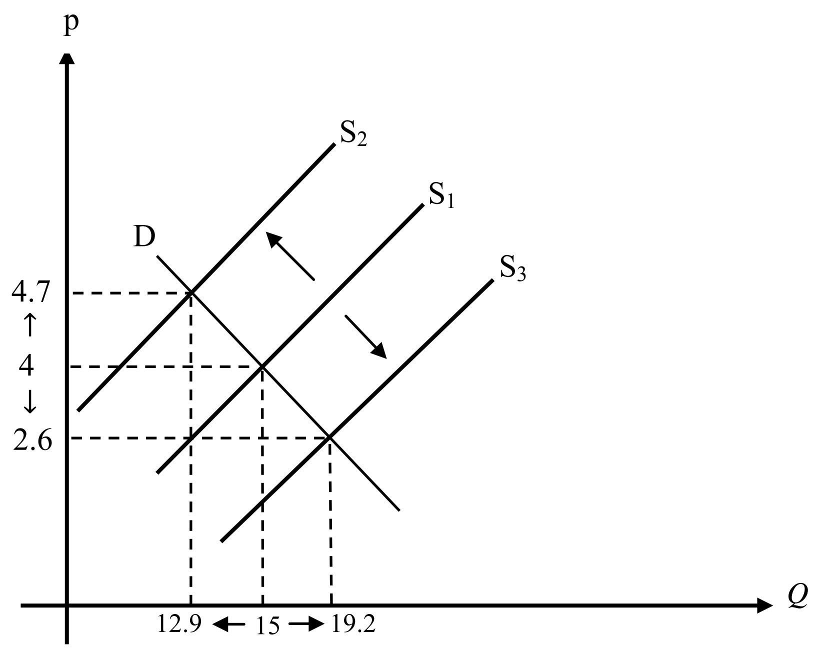
بالتعويض في إحدى الدالتين للحصول على الكمية التوازنية بعد فرض ضريبة مقدارها الوحدة:

$$Q_d = 27 - 3p$$

$$Q_d = 27 - 3(4.7)$$

$$Q_d = 27 - 14.1$$

$$Q_d = 12.9$$



(**3**) بعد تقديم دعم وقدرة 2 وحدة نقدية، فإن الكمية والسعر التوازنيين سيتم حسابهما كالتالي:

$$27- 3P = - 9 + 6 (P + 2)$$

$$27- 3P = 3 + 6 p$$

$$24 = 9 p$$

$$P = \frac{24}{9}$$

$$P = 2.6$$

بالتعويض في إحدى الدالتين للحصول على الكمية التوازنية الجديدة بعد تقديم إعانة مقدارها 2 وحدة نقدية .

$$Q_d = 27 - 3P$$

$$27 - 3\,(2.6) = 19.2$$

(4) أثر فرض معدل ضريبة مقدارها t

$$27 - 3P = -9 + 6\,(P - t)$$

$$27 - 3P = -9 + 6P - 6t$$

$$27 + 6t + 9 = 9p$$

$$6t + 36 = 9p$$

$$P = \frac{36}{9} + \frac{6}{9}t$$

$$P = 4 + \frac{2}{3}t$$

بالتعويض $Q_d = 27 - 3\,(4 + (2/3)\,t)$

$$Q_d = 27 - 12 - 2t$$

$$Q_d = 15 - 2t$$

حصيلة الضريبة :

$$T = tQ$$

$$T = t\,(15 - 2t)$$

$$T = 15t - 2t^2$$

$$dT/dt = 15 - 4t = 0$$

$$15 - 4t = 0$$

$$15 = 4t$$

$$15 = 4t$$

$$t = \frac{15}{4}$$

$$t = 3.75$$

الضريبة المثلى تتحقق عند التفاضل الثاني dT^2/dt أي أنها تعطى نهاية عظمى إذا كان ناتج المشتقة الثانية سالباً .

$$d^2T/dt^2 = -4 < 0$$

بالتعويض عن قيمة $t = (3.75)$ يتم الحصول على السعر والكمية المثلى.

$$\because\ p = 4 + \frac{2}{3}t$$

$$p = 4 + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{15}{4}\right)$$

$$p = 4 + 2\frac{1}{2}$$

$$p = 6.5$$

بالتعويض عن قيمة $\grave{p}$ يتم الحصول على قيمة $\grave{Q}$.

$$\because\ \grave{Q} = 15 - 2t$$

$$\therefore\ \grave{Q} = 15 - (2)\left(\frac{15}{4}\right)$$

$$\grave{Q} = 15 - \left(\frac{30}{4}\right)$$

$$\grave{Q} = 15 - \left(\frac{30}{4}\right)$$

$$\grave{Q} = 15 - 7.5$$

$$\grave{Q} = 7.5$$

(5) حصيلة الضريبة

$$T = tQ$$

$$T = (3.75) * (7.5) = 28.125$$

	قبل الضريبة والدعم	بعد فرض ضريبة بمعدل 1 وحدة نقدية	بعد تقديم دعم 2 وحدة نقدية	بعد معدل الضريبة الأمثل	في حالة الضريبة	في حالة الدعم
P	4	4.7	2.667	6.5	↑	↓
Q	15	12.9	19.2	7.5	↓	↑

تحقيق التوازن في نماذج الاقتصاد الكلي (نموذج الدخل القومي) :

يعد النموذج الكينزي للدخل القومي بشكله المبسط من النماذج الاقتصادية المألوفة حيث يتكون من متغيرين داخليين هما الدخل (Y) والاستهلاك (C) ، وكذلك متغيرين خارجيين هما الاستثمار (I_0) والإنفاق للدولة (G_0) والمعادلتين الموضحتين لذلك هما :

(أ) **شرط التوازن** : [الدخل القومي (Y) = مجموع النفقات (E)].

$$Y = C + I_0 + G_0$$

تشير الدائرة الصغيرة المرفقة للمتغيرين G_0 ، I_0 إلى أنهما خارجيين

(ب) **دالة الاستهلاك** : وهي معادلة سلوكية

$$C = a + bY$$

علماً بأن (a) تمثل مستوى الاستهلاك الثابت ، و(b) تمثل الميل الحدي للاستهلاك، ولغرض الحصول على القيم التوازنية ($\overline{Y}$) و ($\bar{C}$) بدلالة المتغيرات والمعلمات

الأخرى فإن ذلك يتم بالتعويض بدالة الاستهلاك في دالة شرط توازن الدخل القومي وكما يلي :

$$Y = a + bY + I_0 + G_0$$

$$Y - bY = a + I_0 + G_0$$

$$Y(1 - b) = a + I_0 + G_0$$

أي أن الدخل القومي التوازني (Y) يمكن حسابه من المعادلة التالية:

$$\overline{Y} = \frac{a + I_0 + G_0}{1-b} \qquad b \neq 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ولغرض الحصول على الاستهلاك التوازني ($\bar{c}$) يتم التعويض بمعادلة

الدخل القومي التوازني في دالة الاستهلاك وكما يلي:

$$C = a + bY$$

$$\because Y = \frac{a + I_0 + G_0}{1-b}$$

$$\overline{C} = a + \frac{b(a + I_0 + G_0)}{(1-b)}$$

$$\overline{C} = \frac{a(1-b) + b(a + I_0 + G_0)}{1-b}$$

$$\overline{C} = \frac{a - ab + ab + b\,I_0 + b\,G_0}{1-b}$$

$\overline{C} = \frac{a+b+(I_0 + G_0)}{1-b}$ الاستهلاك التوازني $b \neq 1 \ldots\ldots\ldots (2)$

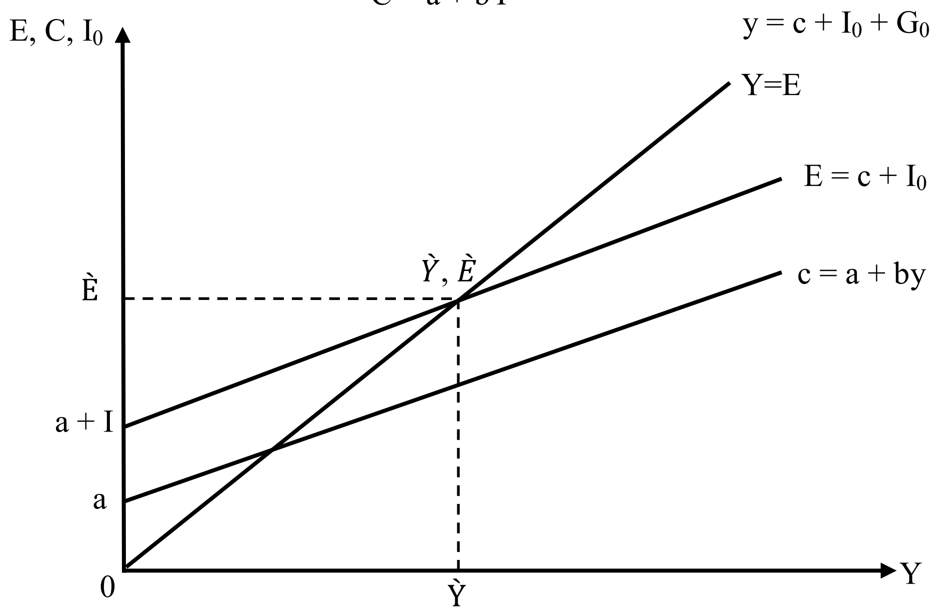
ويمكن كذلك الحصول على المضاعف كما يلي :

المضاعف $= \frac{1}{1-b}$ بشرط $b \neq 1$

وهو يمثل عدد المرات التي يتضاعف فيها الدخل القومي نتيجة لمضاعفة الاستثمار أو نفقات الدولة مرة واحدة فقط. علماً بأن b تمثل الميل الحدي للاستهلاك Marginal Propensity to Consume (MPC)، ويمكن توضيح كيفية تحقيق توازن الدخل القومي بيانيا لاقتصاد مبسط متكون من معادلتي الدخل القومي والاستهلاك التاليتين كما يلي :

$$Y = C + I_0$$

$$C = a + bY$$



شكل رقم (1 - 5) توازن الدخل القومي

مثال (1):

إذا كان نموذج الدخل القومي لاقتصاد مبسط ومغلق على الشكل التالي

$$Y = C + I_0 + G_0$$

$$C = 58 + 0.8\ Y$$

$$I_0 = 25 \text{ ، } G_0 = 15$$

المطلوب : أ . إيجاد الدخل القومي التوازني $\bar{Y}$ والاستهلاك التوازني $\bar{C}$.

ب . اشتقاق المضاعف وتفسير معناه الاقتصادي .

الحل:

أ. يتم التعويض بمعادلة الاستهلاك في معادلة الدخل القومي كما يلي:

$$Y = 58 + 0.8\ Y + I_0 + G_0$$

$$Y = 58 + 0.8\ Y + 25 + 15$$

$$Y - 0.8\ Y = 98$$

الدخل القومي التوازني $0.2\ Y = 98 \quad \rightarrow \quad \bar{\boldsymbol{Y}} = 98 \div 0.2 = 490$

بالتعويض في قيمة $\bar{Y}$ المستخرجة في الدالة الاستهلاكية يتم الحصول على الاستهلاك التوازني كما يلي :

$$\bar{C} = 58 + 0.8\ (490) = 450$$

ب . يمكن استخراج مضاعف الاستثمار أو نفقات الدولة كما يلي : $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-b}}$

$$= \frac{1}{1-MPC}$$

$$= \frac{1}{1-0.8} = 5$$

ويمكن تفسير النتيجة المتحصل عليها بأنه عند مضاعفة الاستثمار أو نفقات الدولة مرة واحدة فأن ذلك يؤدي إلى مضاعفة الدخل القومي بمقدار خمس مرات.

– ويمكن الحصول على النتائج أعلاه بتطبيق الصيغتين (1 ، 2) السابقتين مباشرةً كما يلي:

$$\bar{Y} = \frac{a + I_0 + G_0}{1-b}$$

$$\bar{Y} = \frac{58 + 25 + 15}{1-0.8} = 490$$

$$\bar{C} = \frac{a + b + (I_0 + G_0)}{1-b}$$

$$\bar{C} = \frac{58 + 0.8 + (25 + 15)}{1-0.8} = 450$$

– وهى نفس النتيجة السابقة.

– عند افتراض أن الدخل القابل للتصرف فيه أقل من مستوى الدخل القومي بمقدار الضرائب T المفروضة على الدخل، فإن الدخل القومي التوازني والاستهلاك التوازني سوف تتغير مستوياتهما وذلك كما سيتضح من المثال التالي :

مثال (2): أفترض أن نموذج الدخل القومي في المثال السابق قد تم توسيعه ليشتمل على الضرائب وكما يلي :

$$Y = C + I_0 + G_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$C = 58 + 0.8\,(Y - T) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$T = 0.3\,Y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$I_0 = 25 \text{ ، } I_0 = 15$$

الدخل القابل للتصرف $(Y - T) = Yd$.

المطلوب :

أ . إيجاد الدخل القومي التوازني $\bar{Y}$.

ب . والاستهلاك التوازني $\bar{C}$.

ج . مقدار الضرائب التوازنية $\bar{T}$.

الحل:

يتم التعويض بالمعادلتين الثانية والثالثة في المعادلة الأولى وكذلك بالتعويض عن قيمتي G_0 , I_0

$$C = 58 + 0.8\,(Y - 0.3\,Y)$$

$$C = 58 + 0.56\,Y$$

$$Y = 58 + 0.56\,Y + 25 + 15$$

$$Y - 0.56\,Y = 98$$

$$0.44Y = 98 \quad \rightarrow \quad \bar{Y} = 98 \div 0.44 = 222.730$$

الدخل القومي التوازني = $Y = 222.73$

$$C = a + bY$$

الاستهلاك التوازني $C = 58 + 0.56\,(222.73) = 182.73$

الضرائب التوازنية $T = 3\,Y$

$$T = 0.3\,(222.73) = 66.82$$

ويمكن كذلك توسيع النموذج ليشتمل على الصادرات والواردات فتصبح معادلة الدخل القومي كما يلي :

$$Y = C + I_0 + G_0 + (X_0 - M_0)$$

حيث أن: X_0 : تمثل الصادرات .

M_0 : تمثل الواردات .

مثال (3) : إذا كان نموذج الدخل القومي على الشكل التالي:

$$Y = C + I_0 + G_0 + (X_0 - M_0)$$

$$C = C_0 + bY$$

$$M = M_0 + \alpha Y$$

$$X_0 = 40, G_0 = 32 \text{ ، } I_0 = 45 , \alpha = 0.15 , b = 0.8 , M_0 = 20 , C_0 = 35$$

المطلوب : استخرج $\bar{Y}$ ، $\bar{C}$، $\bar{M}$.

الحل :

يتم التعويض في معادلة الدخل القومي وكل من معادلة الاستهلاك ، ومعادلة الواردات M.

$$Y = C_0+by + I_0 + G_0 + (X_0 - M_0 - \alpha Y)$$

$$Y= 35 + 0.8\ Y + 45 + 32 + (40 - 20 - 0.15\ Y)$$

$$Y = 112 + 0.8\ Y + 20 - 0.15\ Y$$

$$Y - 0.65\ Y = 132$$

$$0.35\ Y = 132$$

$$0.35Y = 132 \rightarrow \bar{Y} = 132 \div 0.35 = 377.14$$

الدخل التوازني = $\bar{Y} = 377.140$

$$\bar{C} = 35 + 0.8(377.14) = 336.712$$

$$\bar{M} = 20 + 0.15(377.14) = 76.571$$

تمارين الفصل الأول

(1) عرف كل من الآتي :

علم الاقتصاد والرياضي، المتغيرات المنتظمة والعشوائية، المعادلات الهيكلية.

(2) قدر سعر وكمية التوازن من دالتي العرض والطلب الآتيتين :

$$D = 4 - 3P \ , \ S = 2P$$

(3) إذا علمت أن دالتي الطلب العرض في السوق سلع ما كما يأتي :

$$D = 8 - 2P$$

$$S = 3P - 6$$

المطلوب :

ا. إيجاد سعر وكمية التوازن .

ب. إذا فرضت ضريبة نوعية بمعدل 1 دينار للوحدة المباعة أوجد التوازن الجديد .

ج. أحسب معدل الضريبة الأمثل والسعر والكمية المقابلين لها وحصيلة تلك الضريبة .

د. ما هي الآثار الاقتصادية لفرض ضريبة على التوازن السوقي.

(4) بين أثر منح إعانة إنتاج مقدارها الوحدة على الأسعار والكميات التوازنية علماُ بأن دالتي الطلب والعرض على النحو التالي:

$$D = 8 - 2P$$
$$S = 3P - 6$$

(5) إذا كان نموذج الدخل القومي لاقتصاد مبسط ومغلق على الشكل التالي

$$Y = C + I_0 + G_0$$
$$C = 55 + 0.6\,Y$$

$I_0 = 26$ ، $G_0 = 17$

المطلوب : أ . إيجاد الدخل القومي التوازني $\bar{Y}$ والاستهلاك التوازني $\bar{C}$.

ب . اشتق المضاعف وتفسير معناه الاقتصادي .

(6) إذا توافرت لديك البيانات التالية :

$$Y = C + I_0 + G_0 + (X_0 - M)$$

$$C = C_0 + bY$$

$$M = M_0 + \alpha Y$$

$X_0 = 50, G_0 = 33$ ، $I_0 = 40$, $\alpha = 0.17$, $b = 0.6$, $M_0 = 10$, $C_0 = 33$

المطلوب : أ . إيجاد الدخل القومي التوازني $\bar{Y}$.

ب . والاستهلاك التوازني $\bar{C}$.

(7) أوجد السعر التوازني والكمية التوازنية إذا علمت أن :

$$D = 8 - 5P$$
$$S = 8P - 6$$

ثم بين أثر تقديم دعم للمنتج قدره 2 وحدة نقدية .

(8) إذا علمت أن دالتي العرض والطلب للحصول القمح في السوق كانت ما يلي:

$$D - 8 - 5P = 0$$

$$S + 6 = 8P$$

مستعيناً بالرسم في جميع الحالات ؟

المطلوب:

(ا) قدر سعر وكمية التوازن.

(ب) إذا فرضت ضريبة نوعية بمعدل 1 وحدة نقدية للوحدة المباعة أوجد التوازن الجديد .

(ج) بين أثر تقديم دعم للمنتج قدره 2 وحدة نقدية للوحدة المباعة أوجد التوازن الجديد .

(د) أحسب معدل الضريبة الأمثل والسعر والكمية المقابلتين وحصيلة الضريبة .

(هـ) ما هي الآثار الاقتصادية لفرض ضريبة أو تقديم إعانة على التوازن السوقي (الأثر الاقتصادي) ؟.

(9) حل النموذج الخطي للتوازن الجزئي التالي مستخرجاً السعر التوازني والكمية التوازنية.

$$Q_d = Q_s$$

$$Q_d = 18 - 3P$$

$$Q_S = -3 + 4P$$

ثم ما أثر فرض ضريبة نوعية على وحدة الإنتاج مقدارها $t = 2$ على كل من السعر التوازني والكمية التوازنية؟.

الفصل الثاني

أنواع الدوال الرياضية

الفصل الثاني
أنواع الدوال الرياضية

تعبر الدالة عن العلاقة بين متغيرين X و Y بحيث نجد أن لكل قيمة للمتغير X تتبعها قيمة للمتغير y ويمكن وضع الدالة كالآتي .

$$Y= f(X)$$

حيث تقرأ Y دالة في X ويطلق على Y المتغير التابع بينما X المتغير المستقل ويمكن التعبير عن الدالة نظرياً ورياضياً وبيانياً .

$Y=f(X_1)$ تسمى الدالة ذات متغير واحد

$Y= f(X_1\ X_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X_n)$ دالة متعددة المتغيرات

مثال (1) :

إذا كانت $Y= X + 2X^2 + 3$

أوجد قيمة Y عندما X = 2

الحل :

$$Y_{X=2} = X + 2\,X^2 + 3$$

$$Y_{X=2} = 2 + 2\,(2)^2 + 3$$

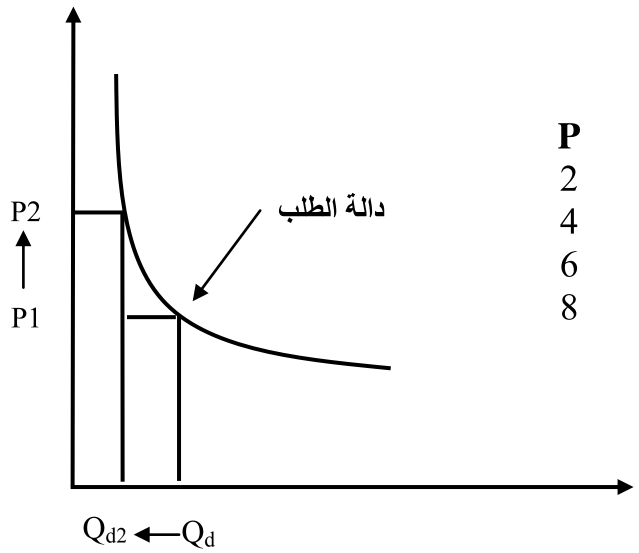
$$Y_{X=2} = 2+8 + 3 = 13$$

$$Y_{X=2} = 13$$

إذا كان دالة الطلب تمثلها العلاقة التالية: متغير مستقل $Q_d = f(p) \rightarrow$ متغير تابع.

حيث Q_d تمثل الكمية المطلوبة و P تمثل السعر.

لو تم افتراض البيانات التالية لكل من السعر والكمية لسلعة ما.



P	d
2	25
4	20
6	15
8	10

شكل (2 – 2) العلاقة بين السعر والكمية

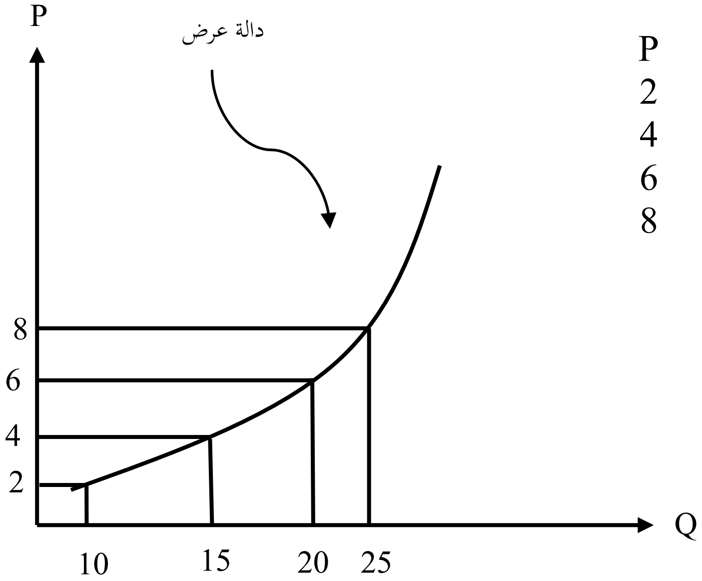
يلاحظ أن كلما زاد السعر قلت الكمية مما جعل منحنى الطلب ينحدر من أعلى إلى أسفل من الشمال إلى الجنوب، أي أن المنحنى يمثل العلاقة العكسية بين السعر والكمية.

أما إذا كانت دالة العرض تمثلها العلاقة التالية:

$$Q_S = f\ (P)$$

حيث $\boldsymbol{Q_S}$ تمثل الكمية المعروضة، P تمثل السعر.

لو تم افتراض البيانات التالية لكل من السعر والكمية لسلعة ما.



P	Q_S
2	10
4	15
6	20
8	25

شكل (2–2) يمثل العلاقة بين السعر والكمية المعروضة

درجة الدالة .

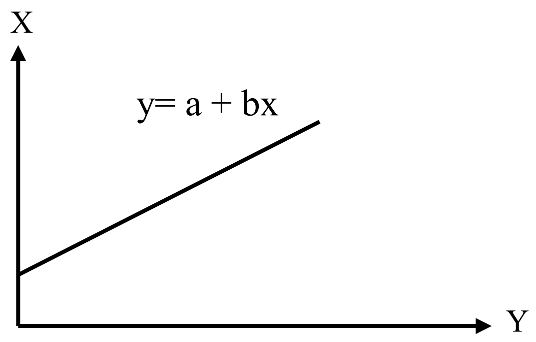
هي عبارة عن قيمة أعلى أس لمتغير فيها أو في حالة ضرب متغيرين أو أكثر في الدالة فدرجتها هي عبارة عن مجموع أسسهم فمثلاً .

$\boldsymbol{Y = X^1 + Z^5}$ **دالة من الدرجة الخامسة .**

$\boldsymbol{Y = X^4 + X^3\, d^1 M^4 + F^7}$ **دالة من الدرجة الثامنة .**

1. الدالة الخطية

أ. هي التي تكون درجة المتغير فيها الدرجة الأولى، وهناك نوعان، الأولى غير مبتدئة من نقطة الأصل . $y= a + bx$



شكل (2–3) دالة خطية غير مبتدئة من نقطة الأصل

مثال (1) :

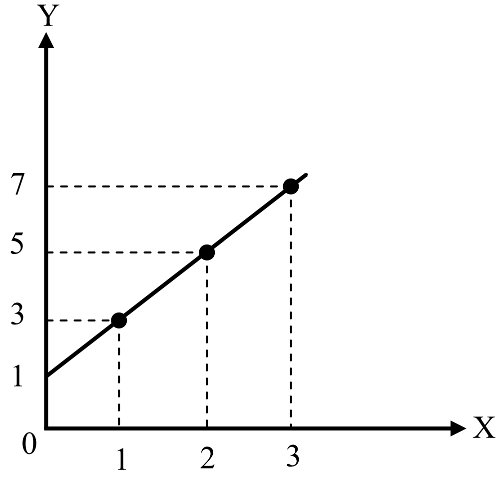
$$Y = 1 + 2X$$

مثل هذه الدالة بيانياً بفرض الأرقام الآتية:

$X = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$

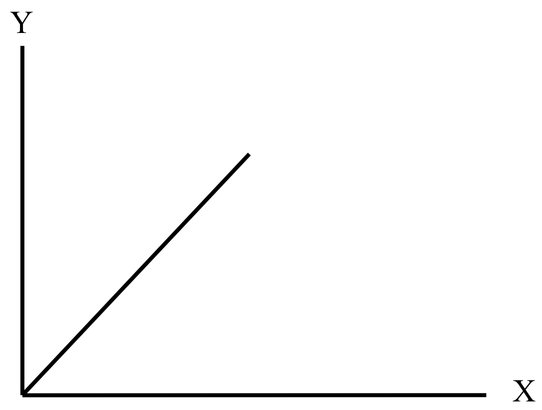
$Y = 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7$

الحل:



ب. دالة خطية مبتدئة من نقطة الأصل.

$$Y = dX$$



شكل (2–4) دالة خطية مبتدئة من نقطة الأصل

مثال (3):

إذا كانت :

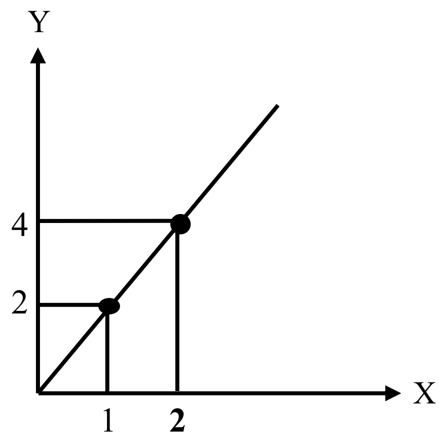
$$Y = 2\,X$$

مثل هذه الدالة بيانياً .

الحل :

$$X = 0 \quad 1 \quad 2$$

$$Y = 0 \quad 2 \quad 4$$



2. الدالة التربيعية

وتكتب على الصورة التالية

$$Y = a + b_1\,x + b_2\,x^2$$

ويمكن إيجاد قيمة X للدالة التربيعية عندما تنعدم قيمة Y بتطبيق القانون :

$$X = \frac{-\,b \pm \sqrt{b2 - 4ac}}{2a}$$

مثال (1) :

إذا كانت الدالة من الدرجة الثانية كالآتي:

$$2X^2 + 5X + 2 = 0$$

أوجد قيمة X .

الحل :

$$a = 2 \qquad b = 5 \qquad c = 2$$

$$X = \frac{-5 \pm \sqrt{25-4*2*2}}{2*2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4}$$

$$X = \frac{-5 \pm 3}{4}$$

إما $X = \frac{-5+3}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

أو $X = \frac{-5-3}{4} = \frac{-8}{4} = -2$

3. الدالة التكعيبية

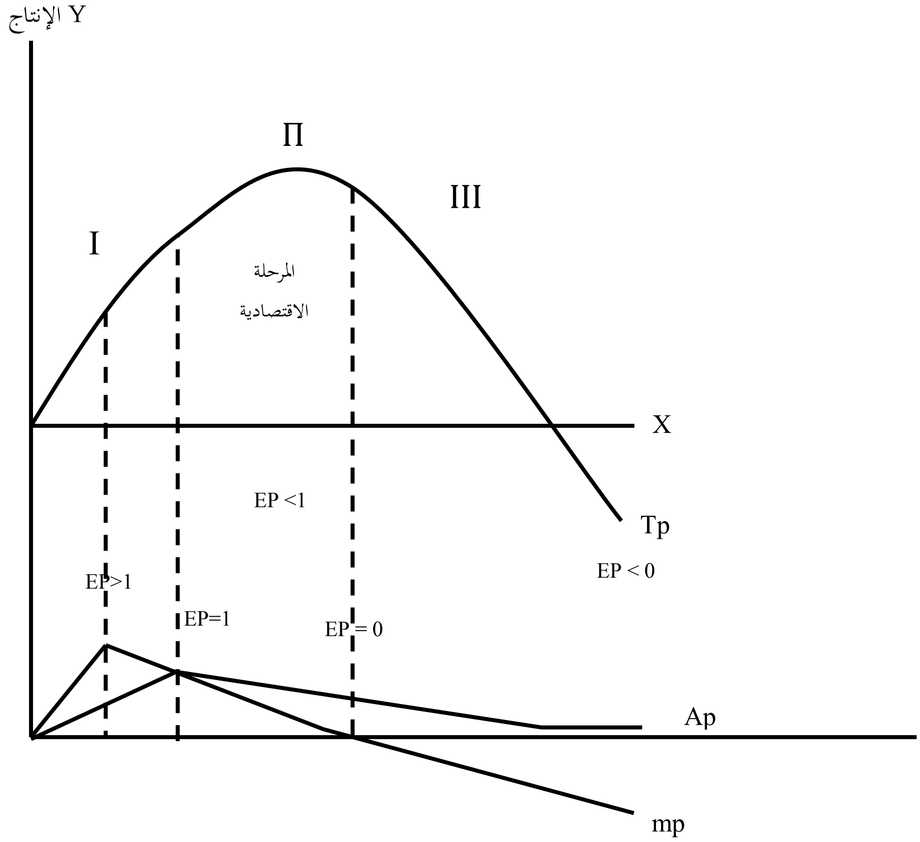
$$Y = a \pm b_1 X + b_2 X^2 \pm b_3 X^3$$

وهي تمثل دالة الإنتاج وتمثل أيضاً قانون تناقص الغلة ودالة الإنتاج بمعنى أنها هي العلاقة الطبيعية (الفنية أو التقنية) بين الموارد الإنتاجية والإنتاج.

$$X = f\ (X_1, X_2, \ldots \ldots \ldots \ldots X_n)$$

حيث Y ← حجم الإنتاج

$X_n, ..., X_1 \leftarrow$ عناصر الإنتاج أو موارد الإنتاج مثل الأرض والعمل ورأس المال والإدارة.



شكل (2–5) دالة الانتاج (الناتج الكلي TP، الناتج المتوسط AP، الناتج الحدي MP)

4. الدالة الأسية :

من أشهر الدوال في الاقتصاد الزراعي وتسمى دالة كوب دوجلاس وتأخذ الصورة الآتية:

- في حالة مدخل (عنصر انتاج) وحيد $Y = A\,X^{b}$

حيث Y تمثل الإنتاج الكلي و X مورد الإنتاج و b تسمى مرونة الإنتاج .

- في حالة مدخلين (عنصري إنتاج) $Y = AX_1^{b_1}X_2^{b_2}$

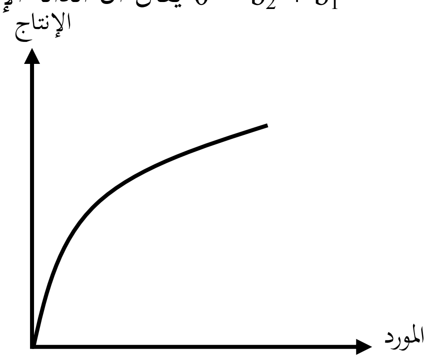
وفي هذه الدالة لـ b_1 ، b_2 دلالة اقتصادية معينة فهي تشير إلى المرونة الإنتاجية لموردي الإنتاج X_1 و X_2 على الترتيب.

وهناك علاقة بين العائد للسلعة في الدالة الإنتاجية والمرونات الإنتاجية .

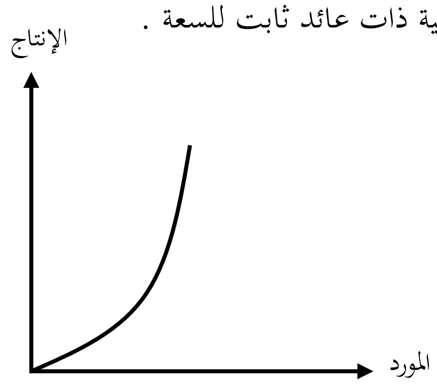
إذا كان $b_1 + b_2 > 1$ يقال أن الدالة الإنتاجية ذات عائد متزايد للسعة .

$b_1 + b_2 < 1$ يقال أن الدالة الإنتاجية ذات عائد متناقص للسعة.

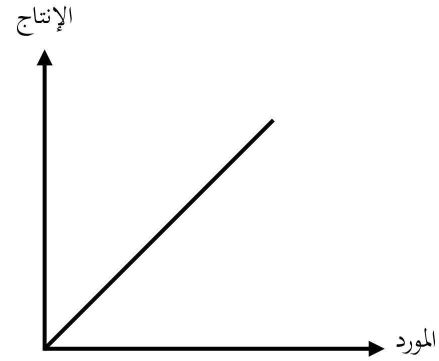
$b_1 + b_2 = 0$ يقال أن الدالة الإنتاجية ذات عائد ثابت للسعة .



شكل (2- 6) دالة ذات عائد متناقص للسعة



شكل (2–7) دالة ذات عائد متزايد للسعة



شكل (2- 8) دالة ذات عائد ثابت للسعة

س: ما الفرق بين الدالة الإنتاجية لكوب دوجلاس والدالة التكعيبية للإنتاج ؟

1) $Y = AX_1^{b_1}X_2^{b_2}$

2) $Y = a \pm b_1X \pm b_2X^2 + b_3X^3$

يلاحظ أن الفرق بينهما كالآتي:

في حالة دالة كوب دوجلاس يلاحظ أن العلاقة بين المتغير التابع Y الذي يمثل كمية الإنتاج مع موردي إنتاج وأن أسس كل متغير (مورد) تمثل مرونته، أما في الدالة التكعيبية فالعلاقة بين Y وعنصر إنتاجي واحد مع فرض ثابت باقي العوامل (موارد الإنتاج) وإن المرونة في هذه الدالة التكعيبية للإنتاج خارج قسمة الناتج الحدي على الناتج المتوسط .

مثال (**1**) :

إذا كانت الدالة لإنتاج محصول زراعي تأخذ الشكل التالي هي:

$$Y = 5\,X_1^{0.6}\,X_2^{0.7}$$

فما هي مرونة الإنتاج للعنصر الأول ومرونة الإنتاج للعنصر الثاني وما هي دلالة المرونتين الاقتصادية .

الحل:

المرونة الإنتاجية الجزئية العنصر الأول هي 0.6

المرونة الإنتاجية الجزئية العنصر الثاني هي 0.7

الدلالة الاقتصادية للمرونتين = $0.6+0.7=1.3$

$\therefore 1.3>1$

$\therefore$ هذه الدالة ذات عائد متزايد للسعة لأن مجموع المرونتين الإنتاجيتين الجزئية أكبر من 1 .

بعض الاشتقاقات الخاصة بدالة الإنتاج

1. الناتج الكلي

يرمز له بالرمز (TP) هو إجمالي الإنتاج المتحصل عليه باستخدام الموارد الإنتاجية في العملية الإنتاجية. وهناك طريقتين لتقدير الناتج الكلي:

أما بطريقة الناتج الكمي (الفيزيقي) أي بالكميات توضح سواءً بالكيلوجرام أو بالقنطار أو بالطن .....الخ

أو بطريقة الناتج القيمي (النقود).

أي أنّ الناتج القيمي = عدد الوحدات المنتجة × سعر الوحدة المنتجة

2. الناتج الحدي MP

هو معدل التغير في كمية الإنتاج بالنسبة للتغير في عنصر الإنتاج .

ويعبر عنه رياضياً بالتفاضل الأول لدالة الإنتاج (الحديات تفاضل الكليات).

أو هو ناتج الوحدة الأخيرة من عنصر الإنتاج .

$$MP = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{dY}{dx}$$

حيث Y هو الناتج الكلي و X تمثل عنصر الإنتاج.

3. الناتج المتوسط AP

هو متوسط كمية الإنتاج ويمكن الحصول عليه رياضياً بقسمة الإنتاج الكلي على الوحدات المستخدمة من عنصر الإنتاج.

$$AP = \frac{Y}{X}$$

4. المرونة الإنتاجية .

هي خارج قسمة الناتج الحدي على الناتج المتوسط .

$$EP = \frac{MP}{AP}$$

5. معدل الاستبدال الحدي (معدل الإحلال التقني) بين موردي الإنتاج

وهو سالب الميل وينتج من خارج قسمة الناتج الحدي للمورد الأول على الناتج الحدي للمورد الثاني .

$$MRS = \frac{-MP_{X_1}}{MP_{X_2}}$$

مثال (1) :

إذا كانت الدالة الإنتاجية في الشكل الخطي وتمثلها العلاقة التالية $Y = 5 + 1.5\ X$

حيث Y كمية الإنتاج، X المورد الإنتاجي المستخدم .

فأكمل بيانات الجدول التالي الجدول الآتي :

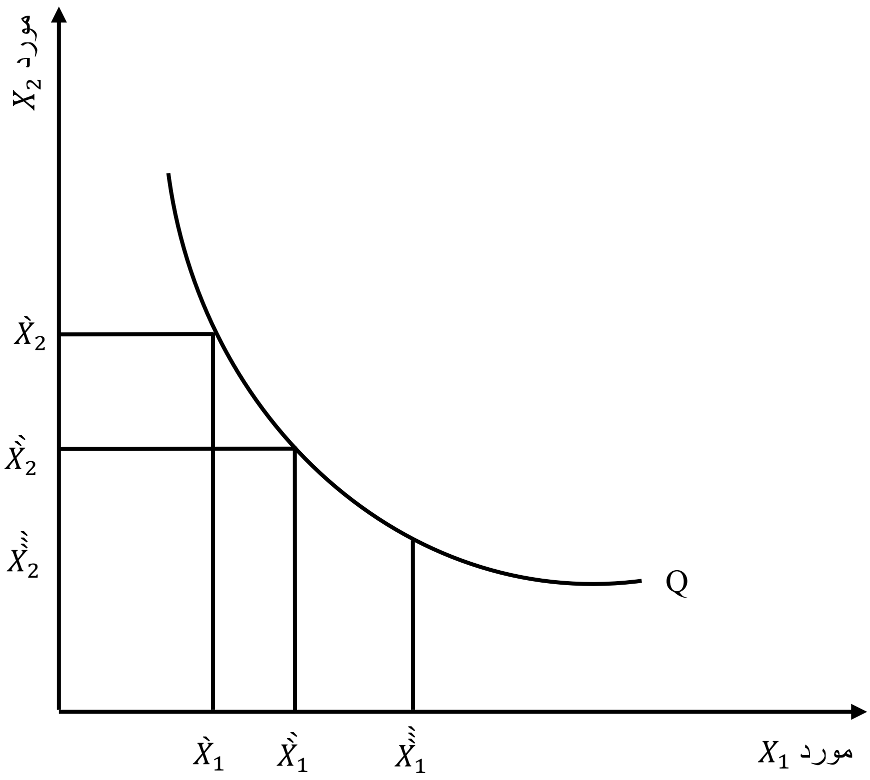
عناصر الإنتاج X	**كمية** Y	AP	MP	$EP = \dfrac{MP}{AP}$
1	6.5	6.5	1.5	0.2
2	8.0	-	1.5	0.4
3	-	3.2	-	0.5
4	11.0	2.9	1.5	-

إذن فإن العملية الإنتاجية تكون في المرحلة الثانية من مراحل الإنتاج وهي المرحلة الاقتصادية لأن المرونة الإنتاجية أقل من الواحد الصحيح.

- منحنى الإنتاج المتماثل

هو عبارة عن مختلف التولفيات من عنصري الإنتاج وليكن X_1 ، X_2 التي تعطي نفس القدر من الإنتاج والذي يحدد استخدام أكبر أو أقل من المورد الإنتاجي هو الندرة.

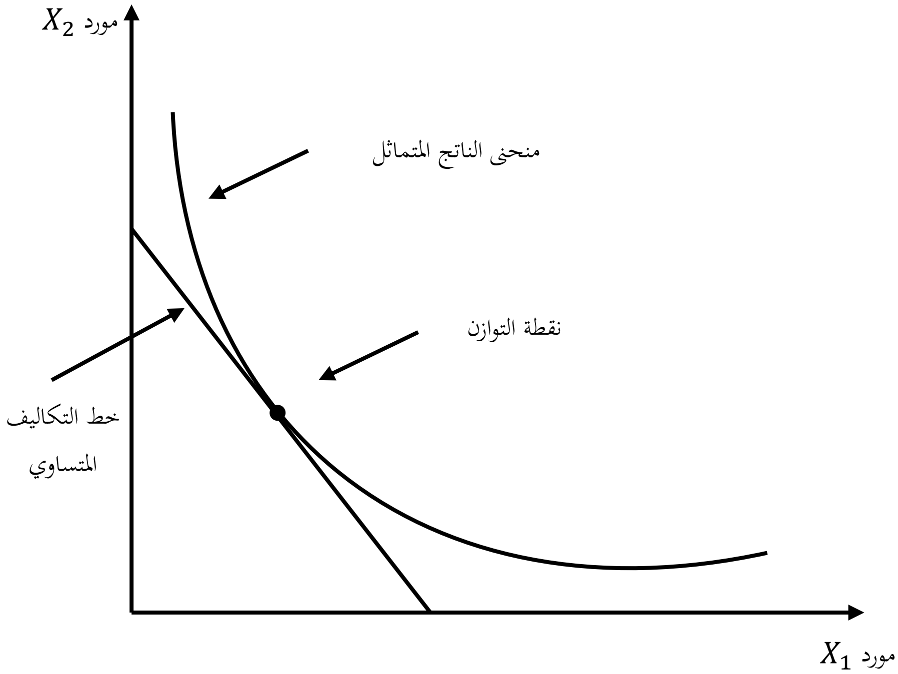
فإذا كان نادراً مثل عنصر رأس المال في الدول النامية فيستخدم بقدر قليل والعكس في الدول المتقدمة بينما إذا كان المورد الإنتاجي موجود بكثرة مثل الأيدي العاملة فيمكن استخدام كمية أكبر منه كما في الدول النامية مثل الهند والباكستان ومصر .....وغيرها.



شكل (2–9) منحنى الناتج المتماثل

نقطة توازن المنتج

هي النقطة التي يتماس عندها خط التكاليف المتساوي مع منحنى الناتج المتماثل .



شكل (2– 10) نقطة التوازن للمنتج

5. الدالة اللوغارتيمية

$$Y = Log\ X$$

هناك ثلاثة قوانين هامة في اللوغاريتمات يجب معرفتها.

$$Log\ AB = Log\ A + Log\ B$$

$$Log\ A/B = Log\ A - Log\ B$$

$$Log\ A^B = B\, Log\ A$$

ولذا يمكن تحويل الدالة اللوغارتيمية إلى دالة خطية تأخذ لوغاريتم الطرفين.

مثال (1):

حول الدالة الآسية الآتية إلى دالة خطية .

$$Y = a\,X_1^b$$

الحل:

يأخذ لوغاريتم الطرفين

$$Log\,Y = Loga\,X_1^b$$

$$Log\,Y = Loga + b\,LogX_1$$

مثال (2) :

حول هذه الدالة من دالة آسية إلى دالة خطية .

$$Y = 5\,X_1^2$$

الحل:

$$Y = 5X^2$$

$$Log\,Y = Log\,5X^2$$

$$Log\,Y = Log\,5 + Log\,X^2$$

$$Log\,Y = Log\,5 + 2Log\,X$$

مثال (3) :

بفرض أن الدالة الآسية الآتية ممثلة لدالة إنتاج مستخدماً موردي إنتاج X_1 و X_2 وممثلة بالعلاقة التالية .

$$Y = 3\, X_1^{\frac{1}{2}}\, X_2^{\frac{3}{4}}$$

حوّل هذه الدالة إلى دالة خطية .

الحل

بأخذ لوغاريتم الطرفين

$$Y = 3\, X_1^{\frac{1}{2}}\, X_2^{\frac{3}{4}}$$

$$\text{Log } Y = Log\; 3\, X_1^{\frac{1}{2}}\, X_2^{\frac{3}{4}}$$

$$\text{Log } Y = Log\; 3 + Log\;\; X_1^{\frac{1}{2}} + Log\;\; X_2^{\frac{3}{4}}$$

$$\text{Log } Y = Log\; 3 + \frac{1}{2}\; Log\; X_1 + \frac{3}{4}\; Log\; X_2$$

6. الدالة العكسية

مثال (1) : إذا كانت

$Y = 2 + 3X$ فإن الدالة العكسية (تعني فإن X تساوي) في نفس المعادلة .

الحل:

$$Y - 2 = 3X$$

$$\therefore X = \frac{Y-2}{3}$$

7. الدالة الصريحة والدالة الضمنية

– الدالة الصريحة :

هي التي يكون فيها المتغير التابع معرفاً بدلالة المتغير المستقل.

مثال (1):

$$Y = 2X^2 + 3X - 5$$

$$Y = 3X^3 + 2X^2 + 5X + 10$$

– الدالة الضمنية :

الدول الضمنية هي كالآتي :

مثال (1):

$$XY + 3X = 10$$

يمكن تحويل الدالة الضمنية إلى حالة صريحة .

$$Y = \frac{10 - 3X}{X}$$

المشتقة وقواعد التفاضل:

لا بد أولاً من التعرف على كل من المتغير المستقل والمتغير التابع فالمتغير المستقل هو المتغير الذي يحدث فيه التغير أولاً وتبعاً لهذا التغير يحدث تغير بدرجات مختلفة في المتغير التابع، ويمكن تمثيل العلاقة الدالية بين المتغير X كمتغير مستقل والمتغير Y كمتغير تابع كما يلي:

$$Y = f(X)$$

وهذا يعني أن المتغير Y هو دالة للمتغير X ، فإذا حدث تغير طفيف جداً في X يقترب من صفر مقداره ΔX فإن ذلك يتبعه تغير في Y مقداره ΔY ويسمى بالمشتقة، ويرمز له برموز مختلفة مثل:

$$\Delta Y / \Delta X = dY/dX = f(\grave{X}) = \grave{Y}$$

ولاستخراج قيمة المشتقة، يتم تطبيق قواعد التفاضل وفيما يلي أهم هذه القواعد.

مشتقة الدالة المرفوعة إلى قوة:

إذا كانت الدالة على الشكل التالي:

$$Y = X^n$$

فإن مشتقتها هي:

$$\grave{Y} = n\, X^{n-1}$$

1. مشتقة الدالة الخطية

إذا كانت

$$Y = a \pm bX$$

فإن

$$\frac{dY}{dX} = \pm b$$

مثال (1):

إذا كانت الدالة الآتية تمثل دالة إنتاج فأوجد قيمة الناتج الحدي لها .

$$Y = 2 + 3X$$

$Y = 12X$ دالة صريحة منطلقة من نقطة الأصل .

$$Y = 5 - \frac{1}{4}X$$

المطلوب: إيجاد الناتج الحدي (MP)، حيث يمكن الحصول عليه من إجراء المشتقة الأولى لكل من دوال الإنتاج السابقة.

$$Y' = \frac{dY}{dX} = 3$$

$$Y' = \frac{dY}{dX} = 12$$

$$Y' = \frac{dY}{dX} = -\frac{1}{4}$$

2. مشتقة مجموع دالتين

هي المجموع الجبري لمشتقيهما.

مثال (1):

$$Y = 12X^2 + 4X^4$$

أوجد $\overline{Y}$

الحل :

$$Y' = 24X + 16X^3$$

3. مشتقة حاصل ضرب دالتين :

الدالة الأولى = الدالة الأولى × تفاضل الثانية + الثانية × تفاضل الأولى .

مثال (1) :

إذا كانت الدالة هي:

$$Y = 3X^4(2X - 5)$$

فأوجد Y' أو $\frac{dY}{dX}$ أو معدل التغير في هذه الدالة .

الحل :

$$Y' = \left(3X^4\right)(2) + (2X - 5)\left(12X^3\right)$$

4. مشتقة خارج قسمة دالتين

$$\frac{\text{المقام} \times \text{تفاضل البسط} - \text{البسط} \times \text{تفاضل المقام}}{\left(\text{المقام}^{2}\right)}$$

مثال (1) :

إذا كانت الدالة الآتية هي :

$$Y = \frac{5 + 2X}{3 + 2X^2}$$

أوجد $\bar{Y}$.

الحل:

$$\bar{Y} = \frac{\left(3 + 2X^2\right)(2) - (5 + 2X)(4X)}{\left(3 + 2X^2\right)^2}$$

5.مشتقة الدالة اللوغارتيمية

إذا كانت :

$$Y = Log\ X$$

فإن:

$$\bar{Y} = \frac{1}{X}$$

6.مشتقة الدالة الآسية

إذا كانت دالة الإنتاج ممثلة العلاقة :

$$Y = 4X^3$$

حيث X هو مورد الإنتاج، فإن الناتج الحدي لهذه الدالة يمكن حسابه كالتالي :

$$\frac{dY}{dX} = 12X^2$$

7. مشتقة دالة الدالة :

إذا كانت:

$$Y = F(u), u = F(X)$$

فإن:

$$Y = F(X)$$

مثال (1) :

إذا كانت: $Y = u^4,\ u = 2X^2 + 3$

فأوجد: $\frac{dY}{dX}$

الحل:

$$\frac{dY}{dX}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dX}$$

$$\frac{dY}{dX}=\left(4u^{3}\right)\left(4X\right)=16u^{3}X$$

8.مشتقة من درجة أعلى

إذا كانت الدالة على النحو التالي:

$$Y=2X^{4}+5X^{3}+3X^{2}$$

فإن

$$Y'=8X^{3}+15X^{2}+6X$$

$$Y''=24X^{2}+30X+6$$

$$Y'''=48X+30$$

$$Y''''=48$$

$$Y'''''=0$$

مثال (1) :

بفرض أن الدالة لموردي إنتاج X_1 و X_2 ممثلة بالعلاقة الآتية .

$$Y=3\,X_1^{\frac{1}{2}}\,X_2^{\frac{3}{4}}$$

أوجد الناتج الحدي لكل من موردي إنتاج X_1 و X_2 .

الحل:

$$\frac{dY}{dX_1} = MP_1 = \left(3 * \frac{1}{2} X^{\frac{1}{2}-1}\right)\left(X_2^{\frac{3}{4}}\right)$$

$$\frac{dY}{dX_2} = MP_2 = \left(3 X_1^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{3}{4} X_2^{\frac{3}{4}-1}\right)$$

مثال (2) :

أكتب الصيغة الرياضية لدالة الإنتاج الزراعي كوب دوجلاس لموردي إنتاج ثم أشتق منها الناتج الحدي والناتج المتوسط والمرونة الإنتاجية ثم بين العلاقة بين العائد على السعة في هذه الدالة ثم مثله بيانياً، ثم أوجد معدل الإحلال المتساوي (التقني) .

الحل

$$Y = aX_1^{b_1}X_2^{b_2}$$

$$MP_1 = \frac{dy}{dx_1} = ab_1X_1^{b_1-1}X_2^{b_2}$$

$$AP_1 = \frac{Y}{X_1} = aX_1^{b_1-1}X_2^{b_2}$$

$$EP_1 = b_1$$

$$MP_2 = \frac{dy}{dx_2} = aX_1^{b_1}X_2^{b_2-1}$$

$$AP_2 = \frac{Y}{X_2} = aX_1^{b_1}X_2^{b_2-1}$$

$$EP_2 = \frac{MP_2}{AP_2} = \frac{aX_1^{b_1}X_2^{b_2-1}}{aX_1^{b_1}X_2^{b_2-1}}$$

عائد السعة $b_2 + b_1 =$

$$MRS = \frac{MP_2}{AP_2} = \frac{-(ab_1X_1^{b_1-1}X_2^{b_2})}{aX_1^{b_1}X_2^{b_2-1}}$$

مثال (3) :

في إحدى التجارب التي أجريت على 75 بقرة للتعرف على العلاقة بين كمية الحليب (Q) والمقادير المستخدمة من العلف المركز X_1 والعلف الأخضر ولتكن البرسيم الحجازي X_2 أمكن الوصول للدالة الإنتاجية التالية التي تبين كمية الحليب والمقادير المستخدمة من موردي الإنتاج X_1 و X_2 .

$$Q = 3.6X_1^{0.44}X_2^{0.50}$$

أحسب

- الإنتاجية الحدية لكل من موردي الإنتاج X_1 و X_2 .
- متوسط الإنتاج لكل من X_1 و X_2 .
- المرونة الإنتاجية لكل من موردي الإنتاج X_1 و X_2 .
- معدل الاستبدال التقني لكل من الموردين .
- العلاقة بين العائد للسعة في هذه الدالة .

الحل:

$$MP_1 = \frac{dQ}{dX_1} = \left(3.6 * 0.44\, X_1^{\,0.44-1}\right)\left(X_2^{\,0.50}\right)$$

$$MP_2 = \frac{dQ}{dX_2}\left(3.6X_1^{\,0.44}\right)\left(0.50X_2^{\,0.50-1}\right)$$

$$AP_1 = \frac{Q}{X_1} = \frac{3.6X_1^{\,0.44}.X_2^{\,0.50}}{X}$$

$$AP_1 = 3.6X_1^{\,0.44-1}.X_2^{\,0.50}$$

$$AP_2 = \frac{Q}{X_2} = 3.6X_1^{\,0.44-1}.X_2^{\,0.50}$$

$$EP_1 = \frac{MP_1}{AP_1} = \frac{\left(3.6 * 0.44X_1^{\,0.44-1}\right)\left(X_2^{\,0.50}\right)}{\left(3.6X_1^{\,0.44-1}\right)\left(X_0^{\,0.50}\right)}$$

$$EP_1 = 0.44$$

$$EP_2 = \frac{MP_2}{AP_2} = \frac{\left(3.6\, X_1^{\,0.44}\right)\left(0.50\, X_2^{\,0.50-1}\right)}{\left(3.6\chi_1^{\,0.44}\right)\left(\chi_2^{\,0.50-1}\right)}$$

$$EP_2 = 0.50$$

$$MRs = \frac{-MP_2}{MP_2} = \frac{-\left(3.6 * 0.44X^{\,0.44-1}\right)\left(X_2^{\,0.50}\right)}{\left(3.6X_1^{\,0.44}\right)\left(0.50X_2^{\,0.50-1}\right)}$$

$$MR_S = \frac{-0.44\, X_1^{-0.56}\, X_2^{0.50}}{0.5\, X_1^{0.44}\, X_2^{-0.5}}$$

$$MR_S = \frac{0.44\, X_2}{0.5 X_1}$$

العلاقة بين عائد السعة في هذه الدالة :

$$b_1 + b_2 = 0.44 + 0.50 = 0.94$$

هذه دالة ذات عائد متناقص للسعة ، بمعنى أن زيادة عنصري الإنتاج بنسبة 10 %

يؤدي إلى زيادة الإنتاج بنسبة 9.4 % .

التطبيقات الاقتصادية للمشتقات

مثال (1) :

إذا كانت التكاليف الكلية لمصنع بالجماهيرية ممثلة في الدالة الآتية :

$$TC = Q^3 + 12Q^2 + 60Q + 20$$

تعرّف على التكاليف الثابتة والمتغيرة ثم أوجد معادلة التكاليف الحدية.

الحل:

التكاليف المتغيرة هي :

$$TVC = Q^3 + 12Q^2 + 60Q$$

$$TFC = 20$$

أما التكاليف الحدية فيمكن حسابها عن طريق المشتقة الأولى لدالة التكاليف كالتالي:

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 3Q^2 + 24Q + 60$$

مثال (2) :

إذا كان منحنى الطلب السوقي لسلعة ما هو:

$$Q = 100 - 2P$$

أوجد معادلة الإيراد الكلي (TR) ومعادلة الإيراد الحدي (MR).

الحل:

$$Q = 100 - 2P$$

$$2P = 100 - Q$$

$$P = 50 - 0.5Q$$

$$TR = PQ$$

$$TR = (50 - 0.5Q)Q$$

$$TR = 50Q - 0.5Q^2$$

$$MR = T\overline{R} = \frac{dTR}{dQ} = 50 - Q$$

مثال (3) :

إذا كانت دالة التكاليف الكلية هي :

$$Tc = 200 + 50Q - 20Q^2 + 0.5Q^3$$

أوجد معادلة التكاليف الحدية (MC) وتعرف على دالة التكاليف الثابتة TFC وتعرف على دالة التكاليف المتغيرة TVC ثم أوجد متوسط التكاليف المتغيرة ومتوسط التكاليف الثابتة ومتوسط التكاليف الكلية.

الحل

$$TC = 200 + 50Q - 20Q^2 + 0.5Q^3$$

$$\frac{dTC}{dQ} = Mc = 50 - 40Q + 1.5Q^2$$

$$TFC = 200$$

$$TVC = 50Q - 20Q^2 + 0.5Q3$$

$$AFC = \frac{200}{Q} = 200Q^{-1}$$

$$AVC = \frac{50Q - 20Q^2 + 0.5Q^3}{Q}$$

$$AVC = 50 - 20Q + 0.5Q^2$$

$$ATC = \frac{200 + 50Q - 20Q^2 + 0.5Q^3}{Q}$$

$$ATc = 200Q^{-1} + 50 - 20Q + 0.5Q^2$$

مثال (4) :

إذا علمت أن دالة التكاليف لمنشأة ما بالجماهيرية هي :

$$TC = 5000Q - 1000Q^2 + \frac{2}{3}Q^3$$

حيث Q هو الناتج و TC هي إجمالي التكاليف الكلية.

المطلوب:

1. أشتق دالة التكاليف الحدية ومعدل تغيرها.
2. أشتق دالة التكاليف المتوسطة.
3. حجم الإنتاج الذي يتساوى فيه دالة AVC مع دالة MC.

الحل

$$MC = 5000 - 2000Q + 2Q^2$$

$$\overline{M}C = -2000 + 4Q$$

$$ATC = TC / Q = \frac{5000Q - 1000Q2 + \frac{2}{3}Q^3}{Q}$$

$$ATC = 5000 - 1000Q + \frac{2}{3}Q^2$$

$$ATC = AVC$$

متوسط التكاليف الكلية = متوسط التكاليف المتغيرة لأنه في هذا المثال لا توجد تكاليف ثابتة.

$$AVC = 5000 - 1000Q + \frac{2}{3}Q^2$$

$$MC = 5000 - 2000Q + 2Q^2$$

$$AVC = MC$$

$$5000 - 1000Q + \frac{2}{3}Q^2 = 5000 - 2000Q + 2Q^2$$

$$1000Q - \frac{4}{3}Q^2 = 0$$

بقسمة الطرفين على Q :

$$1000 = \frac{4}{3}Q$$

$$Q = \frac{1000 \times 3}{4} = \frac{3000}{4}$$

$$Q = 750$$

وهي تمثل الحجم المثل للإنتاج.

مثال (5) :

حدد حجم الإنتاج لمنشأة ما بالجماهيرية الذي تتساوي عنده دالة التكاليف الحدية ودالة متوسط التكاليف المتغيرة، ثم احسب ميل دالة التكاليف المتوسطة عند ذلك الحجم، علماً بأن دالة التكاليف الكلية للمنشأة هي على النحو التالي:

$$TC = 15Q - 6Q^2 + Q^3$$

حيث Q هو الناتج .

الحل:

$$TC = 15Q - 6Q^2 + Q^3$$

$$MC = 15 - 12Q + 3Q^2$$

$$TVC = 15Q - 6Q^2 + Q^3$$

$$AVC = 15 - 6Q + Q^2$$

يتحقق حجم الإنتاج الأمثل عندما تتساوى دالة التكاليف الحدية مع دالة متوسط التكاليف المتغيرة كالتالي:

$$AVC = MC$$

$$15 - 6Q + Q^2 = 15 - 12Q + 3Q^2$$

$$6Q - 2Q^2 = 0$$

$$2Q(3 - Q) = 0$$

إما Q = صفر أو $Q = 3$

أي عندما يصل الإنتاج إلى 3 وحدات فإن ذلك يعبر عن الحجم الأمثل له .

ميل دالة التكاليف المتغيرة عند الحجم الأمثل للانتاج $= \frac{dAVC}{dQ} = -6 + 2Q$

$$= -6 + 2(3) = 0$$

تمارين على الفصل الثاني

(1) أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

$$Y = 2X^3 + 13X^2 - 8X$$

$$Y = 8\sqrt{X} + 6X^{1/3}$$

$$Y = \sqrt[3]{X^2} - X^{3/2}$$

(2) إذا كانت $Y = X + 3X^2 + 5$

أوجد قيمة Yعندما $X = 4$.

(3) إذا كانت الدالة من الدرجة الثانية كالآتي . $3X^2 + 7X + 5 = 0$

أوجد قيمة X .

(4) نفرض أن الدالة الآسية الآتية ممثلة لدالة إنتاج مستخدماً موردي إنتاج X_1 و X_2 وممثلة بالعلاقة التالية : $Y = 3X_1^{3/2} X_2^{5/6}$

حول هذه الدالة إلى دالة خطية .

(5) إذا كانت الدالة الآتية تمثل دالة إنتاج فأوجد قيمة الناتج الحدي .

$$Y = 3 + 4X$$

(6) أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$Y = X^4$$

$$Y = (X)^{2/3}$$

$$Y = \sqrt{X^5}$$

$$Y = 1/X^2$$

(7) أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$Y = 6$$

$$Y = \sqrt{25}$$

$$Y = \frac{1}{32}$$

(8) أوجد مشتقة كل من الدوال التالية

$$Y = 10X^2$$

$$Y = \frac{1}{6\sqrt{X}}$$

(9) أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

$$Y = 2X^{3/2}(X^3 + 8X)$$

$$Y = (X^{-2} - 5)X^3$$

$$Y = (X^2 + 2X)(X^{-3} + 8)$$

(10) أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

$$Y = \frac{X^2}{2+X}$$

$$Y = \frac{X^{2/3}}{(X^2+X)}$$

$$Y = \frac{(X+3X^2)}{(2X^2+X^4)}$$

(11) **أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :**

$$Y = (X^2 + 3X + 12)^4$$

$$Y = (6 + 8X^3 + X4)^{3/2}$$

(12) في إحدى التجارب التي أجريت على 90 بقرة للتعرف على العلاقة بين كمية الحليب (Q) والمقادير المستخدمة من العلف المركز X_1 العلف الأخضر ولتكن البرسيم الحجازي X_2 أمكن الوصول للدالة الإنتاجية التالية التي تبين كمية الحليب والمقادير المستخدمة من موردي الإنتاج X_1 و X_2 .

$$Q = 4.5\, X_1^{0.55} \,.\, X_2^{074}$$

أحسب

- الإنتاجية الحدية لكل من موردي الإنتاج X_1 و X_2 .
- الإنتاجية المتوسطة لكل من X_1 و X_2 .
- المرونة الإنتاجية لكل من موردي الإنتاج X_1 و X_2 .
- معدل الاستبدال التكنولوجي لكل من الموردين .
- العلاقة بين العائد للسلعة في هذه الدالة .

(13) **اعتبر الدالة الثانية دالة إنتاج زراعي**

$$Y = 2X_1^{\,0.3}.X_2^{\,0.5}$$

حيث y تمثل كمية الإنتاج ، X_1 و X_2 هما موردي العمل ورأس المال فأوجد معدل تغير كمية الناتج بالنسبة لكل من موردين ومرونة الإنتاج لكل منها والعلاقة بين العائد للسعة لهذه الدالة ثم أوجد معدل الاستبدال التقني.

(14) إذا علمت أن دالة التكاليف المنشأة بالجماهيرية هي :

$$TC = 4500Q^2 + 3000Q^2 + 0.4Q^3$$

حيث Q هو الناتج المطلوب

1. أشتق دالة التكاليف الحدية ومعدل تغيرها.
2. أشتق دالة التكاليف المتوسطة.
3. عدد حجم الإنتاج الذي يتساوى فيه AVC مع MC.

(15) حدد حجم الإنتاج لمنشأة ما بالجماهيرية الذي تتساوى عنده دالة التكاليف الحدية ودالة متوسط التكاليف المتغيرة علماً بأن التكاليف الكلية للمنشأة هي:

$$TC = 150Q^2 + 60Q^2 + Q^3$$

حيث Q هو الناتج ثم احسب ميل دالة التكاليف المتوسطة عند ذلك الحجم .

(16) إذا كانت دالة التكاليف الكلية هي :

$$TC = 150 + 60Q + 10Q^2 + 0.6\,Q^3$$

- أوجد معادلة التكاليف الحدية (MC) .
- أوجد على دالة التكاليف الثانية TFC .
- أوجد على دالة التكاليف المتغيرة TVC.
- أوجد دالة كل من متوسط التكاليف المتغيرة ومتوسط التكاليف الثابتة ومتوسط التكاليف الكلية.

الفصل الثالث

المصفوفات وتطبيقاتها الاقتصادية

الفصل الثالث

المصفوفات وتطبيقاتها الاقتصادية

المحددات

مفكوك المحدد من الرتبة 2×2 :

مفكوك المحدد من الرتبة 2×2 = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي – حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي

مثال (1) :

أوجد مفكوك المحدد

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} =$$

الحل :

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 30 = -24$$

مفكوك المحدد الرتبة الثالثة 3×3 :

مفكوك المحدد من الرتبة 3×3 بطريقة الأسهم = حاصل ضرب وجمع الأقطار الرئيسية مطروحاً منه حاصل ضرب وجمع الأقطار الفرعية .

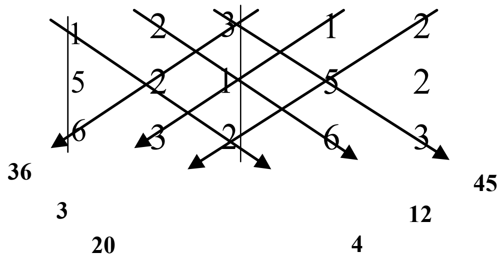
مثال (1) : أوجد مفكوك المحدد التالي

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

الحل :

بالطريقة الأولى : (طريقة الأسهم).

$$\Delta = (4+12+45)-(36+3+20)$$



$$\Delta = 61-59$$

$$\Delta = 2$$

بالطريقة الثانية : (**الطريقة العامة**) : إذا تم اختيار الصف الأول لغرض حساب المحدد فأن الإشارات الجبرية التبادلية هي (+ ، − ، +) وضرب الرقم الأول في الصف الأول في المحدد المرافق له بعد إلغاء الصف الذي منه الرقم وكذلك العمود ونستمر بنفس الطريقة مع بقيه أرقام الصف الأول .

مثال (2) : أوجد مفكوك المحدد في المثال السابق بالطريقة العامة :

$$\Delta = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 1\ (4-3) - 2\ (10-6) + 3\ (15-12)$$

$$\Delta = 1\times 1 - 2\times 4 + 3\times 3$$

$$\Delta = 1 - 8 + 9 = 2$$

مثال :

أوجد مفكوك المحدد الآتي بالطريقتين

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

الطريقة الأولى :

الحل

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

$$\Delta = (3+3+2) - (1+1+18) = 8 - 20 = -12$$

الطريقة الثانية :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\Delta = 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 1\ (3 - 1) - 1\ (1 - 3) + 2\ (1 - 9) = 2 + 2 - 16 = -12$$

مثال (4) :

أوجد مفكوك المحدد الآتي بالطريقتين:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

الطريقة الأولى

$$\left|\begin{matrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

$$\Delta = \{ (-3) + (-3) + (-2)\} - \{(-18 + (-1) + (-1)\} = -8 + (-20) = -12$$

الطريقة الثانية :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 1(3-1) - 1(1-3) + 2(1-9) = 2+2-16 = -12$$

جمع المصفوفات :

يتم جمع المصفوفات إذا كانت في نفس الرتبة ويتم الجمع بإضافة كل عنصر على العنصر المناظر له في المصفوفة الأخرى أي يتم جمع المصفوفات من نفس الرتبة .

مثال (1) :

أوجد حاصل جمع المصفوفتين الآتيتين :

الحل:

$$\underset{2x2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}} + \underset{2x2}{\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}} = \underset{2x2}{\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}}$$

مثال (2) :

أوجد حاصل جمع المصفوفتين الآتيتين :

الحل:

$$\underset{2x3}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}} + \underset{2x2}{\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}}$$

لا يتم الجمع لأنهما ليس من نفس الرتبة .

طرح المصفوفات

يتم الطرح مع تطبيق نفس شروط الجمع .

مثال (1) :

أوجد حاصل طرح المصفوفتين الآتيتين .

الحل

$$\underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}} - \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}} = \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}}$$

ضرب المصفوفات

هناك شرط أساسي لكي يصلح ضرب مصفوفتين هو :

تساوي أعمدة المصفوفة الأولى مع عدد صفوف المصفوفة الثانية وهو الشرط وتكون النتيجة مصفوفة من رتبة عدد صفوف الأولى وعدد أعمدة المصفوفة الثانية

مثال (1) :

أوجد حاصل ضرب المصفوفتين الآتيتين :

$$\underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}} \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}}$$

الحل:

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[2*1+3*7] & - & [2*6+3*8]\\ [4*1+5*7] & - & [4*6+5*8]\end{bmatrix}$$

2×2 2×2

ع × ص ع × ص

الشرط

النتيجة

$$=\begin{bmatrix}23 & 36\\ 39 & 64\end{bmatrix}$$

مثال (2):

أوجد حاصل ضرب المصفوفتين الآتيتين .

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

2×3 3×4

الشرط

النتيجة

الحل:

$$\begin{bmatrix}[(2*1)+(3*0)+(1*2)]+[(2*2)+(3*2)+(1*0)]+[(2*0)+(3*3)+(1*2)]+[(2*1)+(3*4)+(1*0)]\\ [(1*1)+(2*0)+(0*2)]+[(1*2)+(2*2)+(0*0)]+[(1*0)+(2*3)+(0*1)]+[(1*1)+(2*4)+(0*0)]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 10 & 10 & 14\\ 1 & 6 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

2×4

مثال (3) : أوجد حاصل ضرب المصفوفتين الآتيتين :

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

2×2 الشرط 3×3

النتيجة

المسألة غير صحيحة بالنسبة لعملية الضرب لأن المصفوفة الأولى بها عمودين وصفين والمصفوفة الثانية بها ثلاثة أعمدة وثلاثة صفوف $(2\neq 3)$ أي لا يتوفر فيها شرط ضرب المصفوفتين .

مثال (4) :

إذا كانت $A=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ ، $B=[3\ \ 4\ \ 1\ \ 5]$

أوجد ناتج AB ، BA وماذا تستنتج ؟

الحل:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [3 \;\; 4 \;\; 1 \;\; 5]$$

$4\times1 \qquad 1\times4$

الشرط

النتيجة

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 8 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$BA = [3 \;\; 4 \;\; 1 \;\; 5] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [3+8+0+5] = [16]$$

$1\times4 \qquad 4\times1$

الشرط

النتيجة

يستنتج أن عملية ضرب المصفوفات عملية غير تبديلية .

معكوس المصفوفات

كيفية إيجاد معكوس المصفوفة من الرتبة 2×2 :

يتم ذلك كما يلي :

(1) إيجاد محدد المصفوفة .

(2) إيجاد مصفوفة المرافقات وذلك بعكس عناصر القطر الرئيسي وتغير إشارة عناصر القطر الفرعي .

(3) يتم ضرب المعكوس الضربي لقيمة المحدد في مصفوفة المرافقات فيتم الحصول على معكوس المصفوفة من الرتبة 2×2 .

(4) للتحقيق من صحة الحل يتم ضرب المصفوفة في معكوسها فيتم الحصول على مصفوفة الوحدة: أي $AA^{-1} = I$.

مثال (1) :

أوجد معكوس المصفوفة الآتية .

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

الحل

1. إيجاد المحدد كالتالي : $\Delta = 12 - 15 = -3$

2. يتم إيجاد مصفوفة المرافقات في حالة المصفوفة من الرتبة 2×2 بتبديل عناصر القطر الرئيسي ومتغيرات عناصر القطر الفرعي و تغير إشارتي القطر النوعي.

$$\grave{A} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

.3 $$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\,\grave{A}$$

.4 $$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6}{-3} & \frac{-3}{-3} \\ \frac{-5}{-3} & \frac{2}{-3} \end{bmatrix}$$

هذه هي معكوس المصفوفة 2×2 .

لتحقيق صحة الحل يتم ضرب المصفوفة الأساسية في معكوسها لتعطي مصفوفة الوحدة.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال (2) :

أوجد معكوس المصفوفة الآتية في خطوة واحدة :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 30 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\Delta = 30 - 20 = 10$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{30}{10} & \frac{-4}{10} \\ \frac{-5}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة من الرتبة 3 × 3

يتم إيجاد معكوس المصفوفة من الرتبة 3×3 كالآتي .

1. إيجاد قيمة المحدد.
2. إيجاد مصفوف المرفقات .
3. إيجاد محورة (محولة) المصفوفة .
4. ضرب محولة المصفوفة في $\frac{1}{\Delta}$ فيكون الناتج هو معكوس المصفوفة من الرتبة 3×3

وللتأكد من صحة الحل، يتم ضرب المصفوفة في معكوسها للحصول على مصفوفة الوحدة.

$$(A)(A^{-1}) = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال (1) :

أوجد معكوس المصفوفة الآتية :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

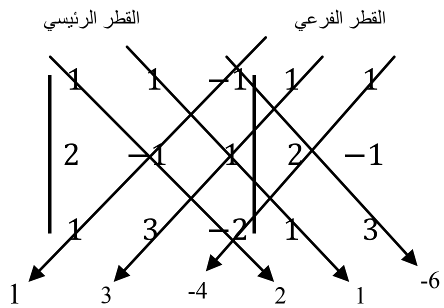
الحل:

إيجاد محدد المصفوفة بالطريقة العامة :

$$\Delta = \mathbf{1}\begin{vmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{vmatrix} - (\mathbf{1})\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{vmatrix} + (\mathbf{-1})\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 1(2 - 3) - 1(-4 - 1) - 1(6 + 1) = -1 + 5 - 7 = -3$$

الطريقة الأخرى :



$$\Delta = -3 - 0 = -3$$

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\grave{A} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المحورة:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -3 \\ 7 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -3 \\ 7 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{-7}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{-7}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل المعادلات باستخدام المصفوفات

مثال (1) :

حل المعادلتين الآتيتين باستخدام المصفوفات :

$$3X_1 + 5X_2 = 19$$

$$6X_1 - 7X_2 = 4$$

الحل

يجب أن يتم وضع المعادلتين في الصورة النموذجية لهما بطريقة المصفوفات ثم تكتب المعادلتين في صورة مصفوفات بالشكل الآتي .

مصفوفة الحدود المطلقة = مصفوفة المعاملات × مصفوفة المجاهيل .

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = -21 - 30 = -51$$

مصفوفة الحدود المطلقة × معكوس مصفوف المعاملات = مصفوف المجاهيل

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-7}{-51} & \frac{-5}{-51} \\ \frac{-6}{-51} & \frac{3}{-51} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{51} & \frac{5}{51} \\ \frac{6}{51} & \frac{3}{51} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{51} & \frac{5}{51} \\ \frac{6}{51} & \frac{3}{-51} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{7}{51}\right) * (19) \; + & \left(\frac{5}{51}\right) * (4) \\ \left(\frac{6}{51}\right) * (19) \; + & \left(\frac{3}{-51}\right) * (4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{133+20}{51} \\ \frac{114-12}{51} \end{bmatrix}$$

$X_1=2 \quad X_2= 3 \therefore$

للتأكد من صحة الحل يتم التعويض في إحدى المعادلتين ولتكن المعادلة رقم 1.

$3 X_1+ 5 X_2= 19$

$X_1= 3 \quad X_2 = 2 \because$

$(3)\ (3) + (5)\ (2) = 19$

$9 + 10 = 19$

∴ الحل صحيح .

مثال (2) :

حل المعادلات الآتية باستخدام المصفوفات وتحقق من صحة الحل .

$$X\,1+2Y\ +3\,Z=2$$

$$3Y\ +X\ +5\,Z=3$$

$$X\ +5Y\ +12\,Z=8$$

الحل

$$X_1+2Y\ +3\,Z=2$$

$$X\ +Y\ +5\,Z=3$$

$$X\ +5Y\ +12\,Z=8$$

مصفوفة الحدود المطلقة = مصفوفة المعاملات × مصفوفة المجاهيل.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الحدود المطلقة × معكوس مصفوفة المعاملات = مصفوفة المجاهيل .

$$X = A^{-1} \times C$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

3×1 3×3 3×1

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 & 1 & 5 & 12 \end{vmatrix}$$

9 25 24 36 10 15

$$\Delta = (36+10+15)-(9+25+24)$$

$$\Delta = 61 - 58 = 3$$

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -7 & 2 \\ -9 & 9 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المحورة

$$\begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{11}/_{3} & {}^{-9}/_{3} & {}^{1}/_{3} \\ {}^{-7}/_{3} & {}^{9}/_{3} & {}^{-2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & {}^{-3}/_{3} & {}^{1}/_{3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ({}^{11}/_{3})(2) + & ({}^{-9}/_{3})(3) + & ({}^{1}/_{3})(8) \\ ({}^{-7}/_{3})(-2) + & ({}^{9}/_{3})(3) - & ({}^{-2}/_{3})(8) \\ ({}^{2}/_{3})(2) - & ({}^{-3}/_{3})(3) + & ({}^{1}/_{3})(8) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{3} \\ \frac{-3}{3} \\ \frac{3}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بالتعويض في إحدى المعادلات للتأكد من صحة الحل وذلك بالقيم التي تم الحصول عليها.

$$X + 2Y + 3\cancel{Z} = 2$$

$$1 - 2 \times 1 + 3 \times 1 = 2$$

$$1 - 2 + 3 = 2$$

$\therefore$ الحل صحيح.

الحل بطريقة كريمر :

$$X + 2Y + 3Z = 2$$

$$X + Y + 5Z = 3$$

$$X + 5Y + 12Z = 8$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 11 - 14 + 6 = 3$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 8 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|A_1| = 2(11) - 2(36 - 40) + 3(15 - 24)$$

$$|A_1| = 22 + 8 - 27 = 3$$

$$X = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{3}{3} = 1$$

بالمثل وتحسب قيم Y ، Z ويتم الحصول على نفس النتائج كما بالمثال السابق .

$$Y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{3}{3} = -1$$

$$Z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{3}{3} = 1$$

مثال (**3**):

تبين المعادلات التالية التوازن السلعي والنقدي بدلالة الدخل القومي Y وسعر الفائدة R.

$$0.3Y \ +100R \ = 252$$

$$0.23Y \ -200R \ = 176$$

أوجد قيمة (y ، R) باستخدام المصفوفات .

الحل

$$0.3Y \ +100R \ = 252$$

$$0.23Y \ -200R \ = 176$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 100 \\ 0.23 & -200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 252 \\ 176 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = -60 - 23 = -83$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-200}{-83} & \frac{-100}{-83} \\ \frac{-0.23}{-83} & \frac{0.3}{-83} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 252 \\ 176 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{50400+17600}{83} \\ \frac{57.96-52.8}{83} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{68000}{83} \\ \frac{819.277}{83} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 819.277 \\ 0.062 \end{bmatrix}$$

مثال (4):

لإنتاج وحدة واحدة من الفحم فإن صناعة الفحم تستخدم $\frac{1}{6}$ وحدة من الفحم ، $\frac{1}{3}$ وحدة من الكهرباء وإنتاج وحدة واحدة من الكهرباء تستخدم صناعة الكهرباء $\frac{1}{12}$ وحدة من الكهرباء وإذا كان الطلب النهائي في سنة إنتاجها من الفحم والكهرباء على التوالي 10 وحدات، 15 وحدة في الكميات التي يجب إنتاجها من الفحم والكهرباء لتغطية الطلب النهائي.

الحل :

نفرض أن الفحم يرمز له بالرمز X_1 ونفرض أن الكهرباء يرمز له بالرمز X_2 .

$$\frac{1}{6}X_1+\frac{1}{3}X_2=10$$

$$\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{12}X_2=15$$

$$\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\15\end{bmatrix}$$

$$\Delta=\left(\frac{1}{6}*\frac{1}{12}\right)-\left(\frac{1}{2}*\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{72}-\frac{1}{6}=\frac{1-12}{72}=\frac{-11}{72}$$

$$\Delta=-11/72$$

$$\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{-11}{72}\right)&\left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{11}{-72}\right)\\\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{11}{-72}\right)&\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{11}{-72}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\15\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-6}{11}&\frac{24}{11}\\\frac{36}{11}&\frac{-12}{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\15\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-66}{11}&\frac{360}{11}\\\frac{360}{11}&\frac{180}{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\15\end{bmatrix}$$

$X_1=27.27$ $X_2=16.36$

التحقيق:

$$\frac{1}{6}X_1+\frac{1}{3}X_2=10$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)(27.27)+\left(\frac{1}{3}\right)(16.36)=10$$

$$4.55+5.45=10$$

$\therefore$ الحل صحيح.

مثال (5):

إذا كان للنشاط الاقتصادي في دولة ما يتكون من ثلاثة صناعات وكانت مصفوفة المعاملات لإنتاج الصناعات الثلاثة هي:

$$A=\begin{bmatrix}0.2 & 0.3 & 0.2\\ 0.4 & 0.1 & 0.3\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\end{bmatrix}$$

وإذا كان الطلب النهائي للسلع الثلاث هي :

$$F=\begin{bmatrix}150\\ 200\\ 210\end{bmatrix}$$

المطلوب تحديد حجم الإنتاج من السلع الثلاث لتغطية الطلب في هذه الدولة.

الحل بطريقة كريمر :

$$|A| = \begin{vmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 0.2\begin{vmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.2 \end{vmatrix} - 0.3\begin{vmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 \end{vmatrix} + 0.2\begin{vmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 \end{vmatrix} = 0.011$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 150 & 0.3 & 0.2 \\ 200 & 0.1 & 0.3 \\ 210 & 0.5 & 0.2 \end{vmatrix}$$

$$|A_1| = 150\begin{vmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 \end{vmatrix} - 0.3\begin{vmatrix} 200 & 0.3 \\ 210 & 0.2 \end{vmatrix} + 0.2\begin{vmatrix} 200 & 0.1 \\ 210 & 0.5 \end{vmatrix}$$

$$|A_1| = -19.5 + 6.9 + 15.8 = 3.2$$

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{3.2}{0.011} = 290.9$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 0.2 & 150 & 0.2 \\ 0.4 & 200 & 0.3 \\ 0.3 & 210 & 0.2 \end{vmatrix}$$

$$|A_2| = 0.2\begin{vmatrix}200 & 0.3\\ 210 & 0.2\end{vmatrix} - 150\begin{vmatrix}0.4 & 0.3\\ 0.3 & 0.2\end{vmatrix} + 0.2\begin{vmatrix}0.4 & 200\\ 0.3 & 210\end{vmatrix}$$

$$|A_2| = -4.6 + 1.5 + 4.8 = 1.7$$

$$X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{1.7}{0.011} = 154.55$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix}0.2 & 0.2 & 150\\ 0.4 & 0.3 & 200\\ 0.3 & 0.2 & 210\end{vmatrix}$$

$$|A_3| = 0.2\begin{vmatrix}0.1 & 200\\ 0.5 & 210\end{vmatrix} - 0.3\begin{vmatrix}0.4 & 200\\ 0.3 & 210\end{vmatrix} + 150\begin{vmatrix}0.4 & 0.1\\ 0.3 & 0.5\end{vmatrix}$$

$$|A_3| = -15.8 - 7.2 + 25.5 = 2.5$$

$$X_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{2.5}{0.011} = 227.27$$

حجم الإنتاج اللازم في الصناعة الأولى = 290.9

حجم الإنتاج اللازم في الصناعة الثانية = 154.6

حجم الإنتاج اللازم في الصناعة الثالثة = 227.3

مثال (6) : أحسب الأسعار التوازنية المشتقة من دوال العرض والطلب لثلاث سلع في النماذج التالية:

$$4P_1 - 2P_2 + 2P_3 = 50$$

$$3P_2 - 2P_1 - 2P_3 = 20$$

$$2P_3 + P_1 - 2P_2 - 35 = 0$$

الحل :

$$4P_1 - 2P_2 + 2P_3 = 50$$

$$-2P_1 + 3P_2 - 2P_3 = 20$$

$$P_1 - 2P_2 + 2P_3 = 35$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \left| \begin{matrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{matrix} \right\| \left. \begin{matrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{matrix} \right|$$

6 16 8 24 4 8

$$\Delta = (24 + 4 + 8) - (6 + 16 + 8)$$

$$\Delta = 36 - 30 = 6$$

$$\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \\ -2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المحورة :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{6} & 0 & \frac{-2}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{6}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{6}{6} & \frac{8}{6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{6} & 0 & \frac{-2}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{6}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{6}{6} & \frac{8}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \\ 35 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{6}\right)(50) + 0 + \left(\frac{-2}{6}\right)(35) \\ \left(\frac{2}{6}\right)(50) + \left(\frac{6}{6}\right)(20) - \left(\frac{4}{6}\right)(35) \\ \left(\frac{1}{6}\right)(50) - \left(\frac{6}{6}\right)(20) + \left(\frac{8}{6}\right)(35) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{100-70}{6} \\ \frac{100+126+140}{6} \\ \frac{50+120+280}{6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 60 \\ 75 \end{bmatrix}$$

$\therefore P_1 = 5 \qquad P_2 = 60 \qquad P_3 = 75$

التحقيق :

$$4P_1 - 2P_2 + 2P_3 = 50$$

$$(4)(5) - 2(60) + 2(75) = 50$$

$$20 - 120 + 150 = 50$$

$$-100 + 150 = 50$$

$\therefore$ الحل صحيح

حل نماذج الدخل القومي باستخدام المصفوفات

يمكن حل نماذج الدخل القومي باستخدام المصفوفات من خلال النموذج التالي :

$$Y = C + I_0 + G_0 + (X_0 - M_0)$$

حيث Y : الدخل القومي C : الاستهلاك

I_0 : الاستثمار G_0 : الإنفاق الحكومي

X_0 : الصادرات M_0 : الاستيراد

$$Y - C = I_0 + G_0 + (X_0 - M_0) \text{......}(1)$$

أما علاقة الاستهلاك بالدخل القومي فتمثلها المعادلة التالية :

$$C = a + bY_d$$

حيث a : تمثل الحد الأدنى للاستهلاك (أو الاستهلاك المستقل عن الدخل) b : الميل الحدي للاستهلاك

Y_d : الدخل المتاح ويمكن الحصول علية من المعادلة التالية :

$$Y_d = Y - T$$

أي أن :

$$C = a + b(Y - T)$$

$$C = a + bY - bT$$

$$-by + C + b\,T = a ....(2)$$

حيث T تمثل الضرائب وترتبط بالدخل من خلال المعادلة التالية :

$$T = e - tY$$

حيث e تمثل الحد الأدنى للضرائب

$$tY - T = e ....(3)$$

حيث t تمثل نسبة الضريبة

وإذا افترض أن كل من (M_0 , X_0 , G_0 , I_0) متغيرات خارجية تتحدد من خارج النموذج فإنه يمكن كتابة المعادلات الثلاث كما يلي :

$$Y - C + 0 = I_0 + G_0 + (X_0 - M_0)$$

$$-by + C + b\,T = a$$

$$-tY + 0 + T = e$$

ويمكن توضيح كيفية تطبيق قاعدة كريمر في حل نموذج الدخل القومي من خلال المثال التالي.

مثال (1): وضح كيفية تطبيق قاعدة كريمر في حل نموذج الدخل القومي التالي:

$$Y = C + I_0 + G_0$$

$$C = 28 + 0.9\,(Y - T)$$

$$T = 10 + 0.2\,Y$$

$$I_0 = 55\ ,\ G_0 = 38$$

المطلوب : إيجاد قيمة كل من Y , C , T

الحل :

$$Y = C + 55 + 3$$

$Y - C = 93$..(1)

$C = 28 + 0.9\,(Y - T)$

$0.9Y + C + 0.9T = 28$………………….……......(2)

$- 0.2Y + T = 10$………….………………..……......(3)

ولغرض استخراج القيم التوازنية نكون المحددات $|A_1|$، $|A_2|$، $|A_3|$.

$$Y - C + 0 = 93$$

$$- 0.9Y + C - 0.9T = 28$$

$$- 0.2Y + 0 + T = 10$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -0.9 & 1 & 0.9 \\ -0.2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.28$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 93 & -1 & 0 \\ 28 & 1 & 0.9 \\ 10 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 112$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 93 & 0 \\ -0.9 & 28 & 0.9 \\ -0.2 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 85.96$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 93 \\ -0.9 & 1 & 28 \\ -0.2 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 25.25$$

$$\overline{Y} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{112}{0.28} = 400$$

$$\overline{Y} = 400$$

$$\overline{C} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{85.96}{0.28} = 307$$

$$\overline{T} = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{25.2}{0.28} = 90$$

تمارين على الفصل الثالث

(1) أوجد حاصل جمع المصفوفتين الآتيتين .

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(2) أوجد مفكوك المحدد التالي

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(3) إذا كانت المصفوفات C,B,A كما يلي .

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$h = -3 \qquad k = 2$$

المطلوب إثبات أن:

1. $A+(B+C)=(A+B)+C$

2. $(K+h)C=KC+hC$

3. $(A\ B)C=A(BC)$

4. $K(B-C)=KB-KC$

5. $K(B\ C)=(KB)C$

6. $A(B-C)=AB-Ac$

(4) إذا كان منحنى الطلب والعرض لسلعة ما هو :

$Q=100-0.5P$

$Q=-50+0.2P$

المطلوب :

أي من المنحنيين يمثل العرض وأيهما الطلب ثم إيجاد الكميات التوازنية والسعر التوازني باستخدام نظام المصفوفات.

(5) أحسب الأسعار التوازنية في النموذج التالي المكوّن من ثلاث سلع علماً بأن دوال العرض والطلب لكل منها كما يلي :

$$Qd_1 = 45 - 2P_1 + 2P_2 - 2P_3$$

$$QS_1 = -5 + 2P_1$$

$$Qd_2 = 16 + 2P_1 - P_2 + 2P_3$$

$$QS_2 = -4 + 2P_2$$

$$Qd_3 = 30 - P_1 + 2P_2 - P_3$$

$$QS_3 = -5 + P_3$$

(6) إذا توافرت لديك البيانات التالية عن نموذج الدخل القومي :

$$Y = C + I_0 + G_0$$

$$C = 56 + 0.9\,(Y - T)$$

$$T = 20 + 0.2\,Y$$

$$I_0 = 110 \quad , \quad G_0 = 76$$

وضح كيفية تطبيق قاعدة كريمر في حل هذا النموذج ؟

(7)إذا كان للنشاط الاقتصادي في دولة ما يتكون من ثلاثة صناعات وكانت مصفوفة المعاملات لإنتاج الصناعات الثلاثة هي :

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

وإذا كان الطلب النهائي للسلع الثلاث هي :

$$D = \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ 180 \end{bmatrix}$$

المطلوب: تحديد حجم الإنتاج من السلع الثلاث لتغطية الطلب في هذه الدولة بطريقة كريمر.

الفصل الرابع

النهايات العظمى والصغرى (التعظيم و التدنية)

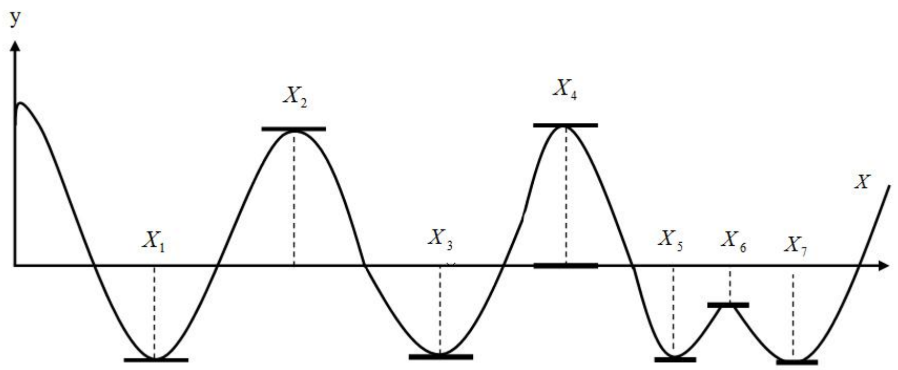
الفصل الرابع

النهايات العظمى والصغرى (التعظيم و التدنية)

من أهم الافتراضات في النظرية الاقتصادية هو فرض تعظيم التصرفات الإيجابية على المستوى الجزئي والكلى وكذلك تدنية التصرفات السلبية مما يساعد على شرح سلوك الوحدات الاقتصادية في المجتمع فالوحدات الاقتصادية المختلفة تحاول الوصول إلى القيمة العظمى أو الصغرى لبعض القيم والمتغيرات. والتعظيم هنا يعني تحديد النقطة التي يتم عندها تعظيم العائد أو الربح بالنسبة لمنشأة ما أو شخص ما أو تعظيم المنفعة لتحقيق أقصى إشباع للمستهلك أو تعظيم الإنتاج لزيادة دخل المنتج أو تعظيم الحصيلة الضريبية للخزينة العامة كأداة من أدوات السياسة المالية .....وغيرها.

أما التدنية (النهايات الصغرى) من أمثلتها تدنية التكاليف أو تقليل الخسارة وهو ما تسعى أي وحدة اقتصادية سواءً على المستوى الجزئي أو الكلي لتحقيقه .

إيجاد النهايات الصغرى والعظمى للدوال : في الشكل التالي:



شكل (4−1) يبين النهايات الصغرى والعظمى

يلاحظ أن هناك أكثر من نهاية سواء عظمى أو صغرى حيث نجد أن النقاط X_1 و X_3 و X_5 و X_7 هي نقط نهايات صغرى ولكي يتوافر شرط هذه النهايات يجب أن تتحول حركة المنحنى من التناقص إلى التزايد ، أما النقاط X_2 و X_4 و X_6 هي نقاط نهايات عظمى، وتتحول عندها من الموجب إلى السالب أي من الزيادة إلى النقصان.

أولاً: النهايات العظمى والصغرى غير المقيدة:

أ. النهاية العظمى والصغرى (في حالة متغير مستقل واحد) :

إذا كانت Y دالة في X

$$Y = F\ (X)$$

فإن طريقة إيجاد النهاية العظمى والصغرى تتم بأخذ المشتقة الأولى لتلك الدالة وكالآتي:

$$\frac{dY}{dX} = 0 \Leftarrow (1)$$

بعد أن يتم إيجاد المشتقة الأولى ومساواتها بالصفر فنحصل على جذور المعادلة (أي قيم X) .

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \Leftarrow (2)$$

يتم التعويض بالجذور المعادلة 1 في المعادلة 2 .

- فإذا كانت $\frac{d^2Y}{dX^2}$ > صفر أي موجبة يعني أن قيمة X المتحصل عليها تعطي نهاية صغرى.

- إذا كانت $\frac{d^2Y}{dX^2}$ > صفر أي سالبة يعني أن قيمة X المتحصل عليها تعطي نهاية عظمى.

- إذا كانت $\frac{d^2Y}{dX^2}$ =عدد ثابت أو حدّ مطلق فإذا كانت إشارته موجبة فإن قيمة X المتحصل عليها من حل المعادلة تعطي نهاية صغرى وإذا كانت سالبة فإن قيمة X المتحصل عليها تعطي نهاية عظمى .

للحصول على قيمة النهاية العظمى أو الصغرى يتم التعويض بالجذور (القيم) التي تم الحصول عليها من حل المعادلة في الدالة الأصلية.

ملحوظة :

عدد نقاط النهايات العظمى يقل بمقدار واحد صحيح عن درجة الدالة أي تساوي درجة الدالة ناقص واحد.

مثال (1) :

إذا كانت الدالة هي

$$Y = 3X^2 - 2X + 10$$

أوجد قيمة X التي تؤدي إلى التعظيم أو التدنية .

الحل:

$$Y = 3X^2 - 2X + 10$$

عدد نقط النهايات $= 2 - 1 = 1$

$$\frac{dY}{dX} = 6X - 2 = 0 \qquad (1)$$

$$6X = 2$$

$$\therefore X = \frac{1}{3}$$

∴ عندما تكون $X = \frac{1}{3}$ فإن الدالة عند هذه النقطة أما أن تكون الدالة في حالة نهاية عظمى أو نهاية صغرى ولذلك يتم اللجوء لأخذ المشتقة الثانية لتلك الدالة.

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = 6 > 0 \qquad (2)$$

∴ النهاية صغرى لأن إشارة الحد المطلق موجبة

∴ القيمة X التي تؤدي إلى التدنية هي $X = \frac{1}{3}$

لإيجاد قيمة هذه النهاية (إحداثيات النهاية) يتم التعويض بقيمة X في الدالة الأصلية.

$$Y = 3X_2 - 2X + 10$$

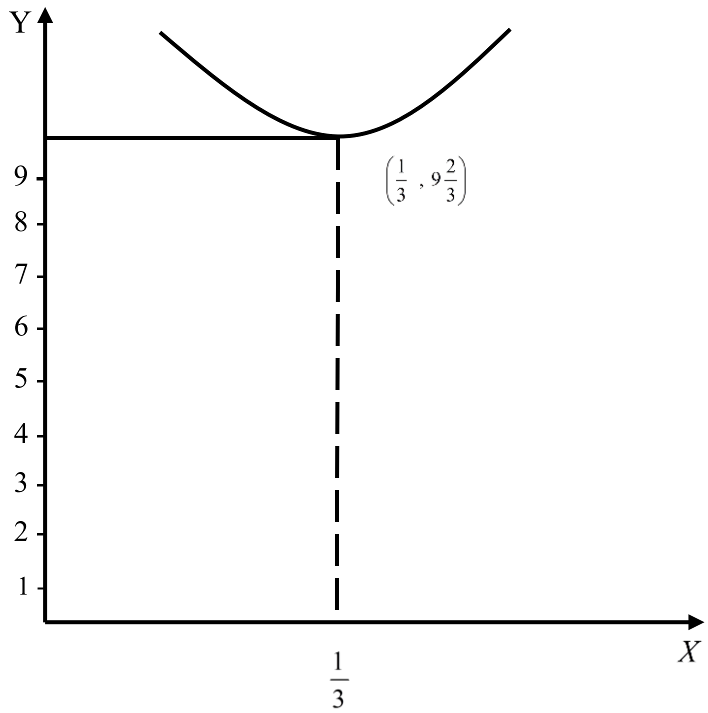
$$y_{X=\frac{1}{3}} = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right) + 10$$

$$Y = 3\left(\frac{1}{9}\right) - 2\left(\frac{1}{3}\right) + 10$$

$$Y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 10 = 9\frac{2}{3}$$

∴إحداثيات قيمة النهاية الصغرى هي :

$$\left(\frac{1}{3},\quad 9\frac{2}{3}\right)$$



مثال (2):

أعتبر X هي كمية الإنتاج، Y هي القيمة المتوسطة للتكاليف الكلية وأن العلاقة الممثلة للمتغيرين X وY هي :

$$Y = X^2 - 6X + 40$$

أحسب الحجم الأمثل للإنتاج (أي الذي يحقق أقل متوسط تكاليف متغيرة) ومثله بيانياً.

الحل:

$$Y = X^2 - 6X + 40$$

أولاً: يتم تحديد نقاط البيانات وكالتالي:

عدد نقاط النهايات =2−1=1

ثانياً: يتم إجراء المشتقة الأولى للدالة ويتم مساواتها بالصفر ثم حل المعادلة وكالتالي:

$$\frac{dY}{dX} = 2X - 6 = 0$$

$$2X = 6 \qquad (1)$$

$$X = 3$$

∴ عندما تكون $X = 3$ فإن الدالة عند هذه النقطة أما أن تكون في حالة نهاية عظمى أو صغرى وللتأكد من ذلك يتم إجراء المشتقة الثانية وكالتالي:

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = 2 > 0 \qquad (2)$$

∴ وحيث القيمة المتحصل عليها من إجراء المشتقة الثانية موجبة عندما X =3 فإن قيمة Y عندما X = 3 تكون الدالة في نهايتها الصغرى.

وللحصول على قيمة Y يتم التعويض في الدالة بقيمة X المتحصل عليها.

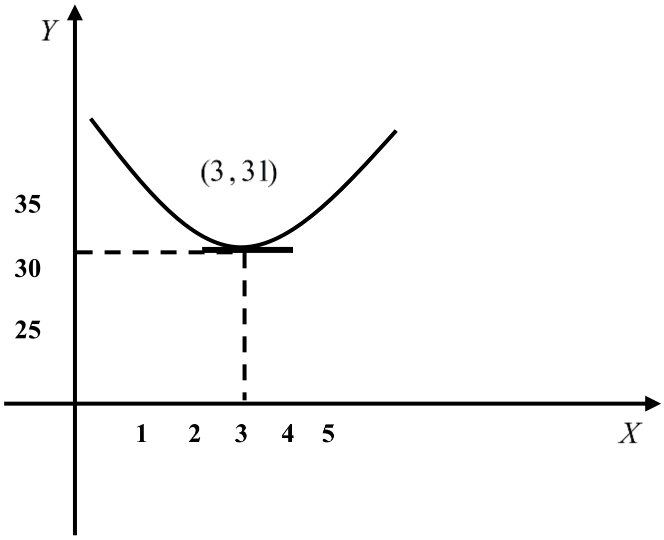
$$Y_{X=3} = 9 - 18 + 40$$

$$(3)$$

$$Y = -9 + 40 = 31$$

∴ إحداثيات النهاية الصغرى هي : (3 ,31)

أي عندما يكون حجم الإنتاج (3 وحدات) يكون منحنى التكاليف المتوسطة أقل ما يمكن وهي (31) وحدة نقدية .



مثال (3) :

إذا علمت أن دالة المنفعة الكلية لمستهلك ما هي :

$$U = 18Q - 3\,Q^2$$

فحدد كمية السلعة التي تعطي للمستهلك أقصي إشباع .

الحل :

$$U = 18Q - 3\,Q^2$$

عدد نقاط النهايات = 2−1=1

$$\frac{dU}{dQ} = 18 - 6Q = 0$$

$$18 = 6Q \Rightarrow Q = 3$$

$$\frac{d^2U}{dQ^2} = -6 < 0$$

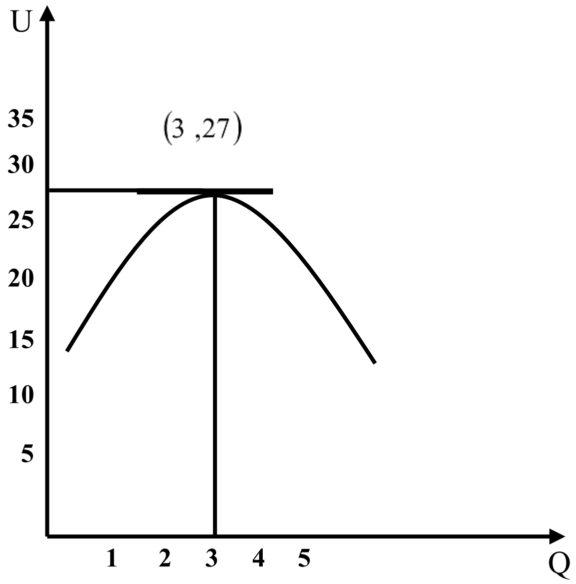
∴ النهاية عظمى

نوجد قيمة U عندما 3 = Q وكالتالي:

$$U_{Q=3} = 18 \times 3 - 3 \times 9$$

$$U = 54 - 27 = 27$$

∴ يتحقق التعظيم أي أقصي إشباع من هذه السلعة لهذا المستهلك عند Q=3 والتي تعطي منفعة كلية قدرها 27 وحدة إشباع لذلك المستهلك.



مثال (4) :

أوجد قيمة كل من النهاية العظمي والصغرى عندما :

$$Y = X^3 - 3X^2 - 9X + 5$$

الحل :

$$Y = X^3 - 3X^2 - 9X + 5$$

عدد نقاط النهايات = 3−1=2

$$\because Y = X^3 - 3X^2 - 9X + 5$$

$$\therefore \frac{dY}{dX} = 3X^2 - 6X - 9 = 0$$

$$3X^2 - 6X - 9 = 0$$

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$X = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(3)(-9)}}{2(3)}$$

$$X = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{6} \quad = \frac{6 \pm \sqrt{144}}{6}$$

إما

$$X = \frac{6+12}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

أو

$$X = \frac{6+12}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

بأجراء التفاضل الثاني للدالة :

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = 6X - 6$$

بتحديد قيمتي X المتحصل عليهما لمعرفة أيهما تحقق النهاية الصغرى أو العظمى و كالتالي:

$$\frac{d^2Y}{dX^2_{X=-1}} = (6)\ (-1)\ -6$$

$$= -6 - 6 = -12 < 0$$

∴ النهاية عندما $X = -1$ تكون نهاية عظمى.

$$\frac{d^2Y}{dX^2_{X=3}} = (6)\ (3)\ -6$$

$$18 - 6 = 12 > 0$$

∴ النهاية عندما $X = 3$ تكون نهاية صغرى.

قيمة Y عندما $X = 3$

$$Y = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 5$$

Y =27 -27 -27 + 5

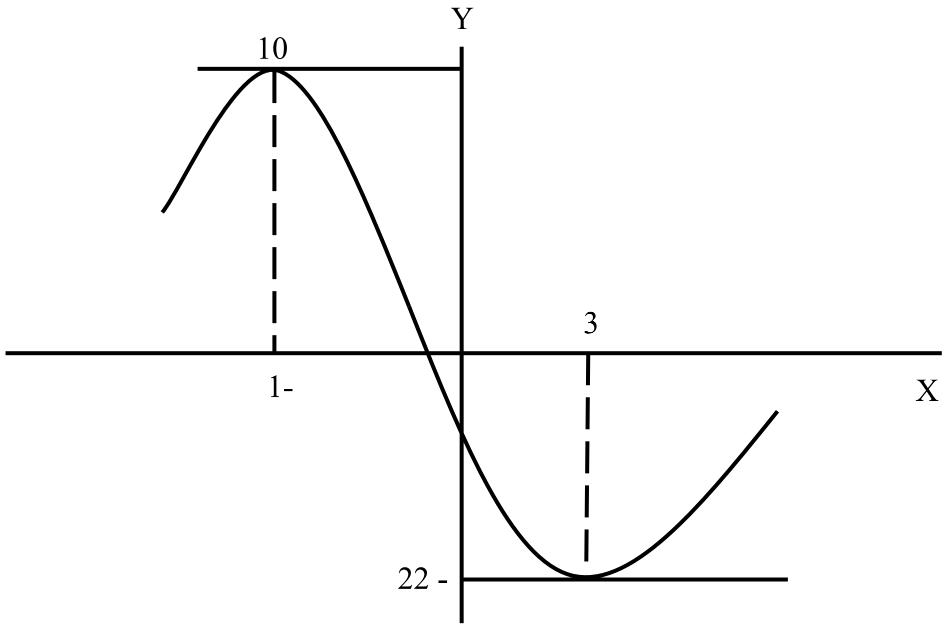
Y = -22

∴ إحداثيات هذه النهاية X → (−1، 10) ← Y عندما X = -1

$$Y_{X=-1} = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5$$

$$Y = -1 - 3 + 9 + 5$$

$$Y = 10$$



Y عندما X = −1 هي :

$$Y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9\ (-1) + 5$$

$$Y = -1\ -3\ +9\ +5$$

$$Y = 10$$

مثال (5) :

إذا علمت أن دالة الإنتاج لمنشأة (Q) ما تستخدم العنصر (L) كانت على الصورة التالية:

$$Q = 12L^2 - L^3$$

فوضح نقاط بلوغ الناتج الكلي والناتج المتوسط والناتج الحدي لأقصى مستوى لهم والعلاقة بين تلك النقاط وماذا يحدث عند تلك النقاط وماذا تلاحظ ومثل ذلك بيانياً .

الحل:

عدد نقاط النهايات = 3−1 = 2

$$Q' = \frac{dQ}{dL} = 24L - 3L^2 = 0$$

$$Q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = -3, b = 24, c = 0$$

$$Q=\frac{-24\pm\sqrt{(24)^2-4(3)(0)}}{2\times(-3)}$$

$$Q=\frac{-24\pm\sqrt{576}}{-6}=\frac{-24\pm 24}{-6}$$

أما $\frac{-24+24}{-6}=0$

أو $\frac{-24-24}{-6}=\frac{-48}{-6}=8$

$$Q''=\frac{d^2Q}{dL^2}=24-6L$$

$$Q''=\frac{d^2y}{dL^2_{L=0}}=24<\mathbf{0}$$

$$Q''=\frac{d^2y}{dL^2_{L=8}}=24-48=-24$$

هناك نقطتين إحداهما يحقق النهاية الصغرى وهي L=0 والأخرى تحقق شرط النهاية العظمى وهي L=8 .

وهذه النهاية الصغرى غير منطقية اقتصادياً ولا توجد في الواقع لأنه لا يوجد إنتاج إذا لم يتوفر عنصر العمل

∴ فهي نهاية يتم حسابها رياضيا ولا توجد لها منطقية اقتصادية كالآتي:

بالتعويض في المعادلة الأصلية

$$Q_{L=0} = 12L^2 - L^3$$

$$= 12(0)^2 - (20)^3$$

إحداثيات النقطة أو النهاية الصغرى (0 ، 0)

بالتعويض في $\bar{\bar{Q}}$ بـ L = 8

$$= 24 - 6L = 24 - 6(8) = -24 < 0\, Q''$$

∴ النهاية العظمى.

ثم بالتعويض في المعادلة الأصلية عن قيمة L=8 كالآتي:

$$Q = 12L^2 - L^3$$

$$Q_{L=8} = (12)\,(8)^2 - (8)^3$$

$$Q = 768 - 512$$

$$Q = 256$$

إحداثيات النهاية العظمى (256 ، 8)

الناتج الكلي وصل أقصى قيمة له وهي 256 عند استخدام 8 وحدات من المورد "L ".

أما عند بلوغ دالة الناتج المتوسط لأقصى قيمة فإنه يتم حسابها كالآتي :

$$Q = 12L^2 - L^3$$

$$AP = \frac{Q}{L} = \frac{12L^2 - L^3}{L}$$

$$AP = 12L - L^2$$

$$AP' = \frac{dAP}{dL} = 12 - 2L = 0 \qquad \therefore L = 6$$

$$AP'' = \frac{d^2AP}{dL^2} = -2$$

ونظراً لأن قيمة المشتقة الثانية لدالة الناتج المتوسط سالبة فإنهم عند استخدام 6 وحدات من عنصر العمل يكون الناتج المتوسط في أقصى قيمة له أي في نهايته العظمى.

$\therefore$ قيمة الناتج المتوسط القصوى تساوي.

$$AP = 12L - L^2$$

$$AP = 12(6) - (6)^2$$

$$AP = 72 - 36 = 36$$

إحداثياتها AP $\rightarrow$ (6،36) $\leftarrow$ L.

يتضح أن الناتج المتوسط بلغ أقصاه وهو 36 وحدة عندما تم استخدام 6 وحدات من المورد (L) .

أما دالة الناتج الحدي فيمكن حسابها بأخذ التفاضل الأول لدالة الإنتاج وكالتالي:

$$MP = TP = \frac{dQ}{dL} = 24L - 3L^2$$

ولمعرفة عدد وحدات العمل الذي يتحقق عندها أقصى إنتاج حدي يتم كالتالي:

$$MP = \frac{dMp}{dl} = 24 - 6L = 0$$

$$24 = 6L$$

$$L = 4$$

$$\frac{d^2MP}{dL^2} = -6 < 0$$

أي عند استخدام عدد 4 وحدات عمل فإن الناتج الحدي يكون في أقصاها ، أي في نهايته العظمى.

بالتعويض في الدالة الأصلية للحصول على إحداثيات النهاية العظمى لدالة الإنتاج للناتج الحدي، فإنه يتم التعويض بعدد العمال.

$$MP = 24L - 3L^2$$

$$MP_{L=4} = (24)\,(4)\,(-3)\,(4)^2$$

$$= 96 - 48 = 48$$

يصل الناتج الحدي أقصاه وهو 48 عند استخدام 4 وحدات من المورد L .

$$L \leftarrow (4،48) \rightarrow MP$$

وعند وصول الناتج الحدي إلى أقصاه فإن الناتج الكلى يكون كالتالي :

$$TP = 12L^2 - L^3$$

$$TP = (12)(4)^2 - (4)^3$$

$$TP = 148$$

$$L \leftarrow (4،148) \rightarrow TP$$

وهى نقطة الانعكاس (الانقلاب).

عند تساوى دالة AP مع دالة MP ماذا يحدث عند هذه الدالة ؟

$$L - 3L^2 = 12L - L^2 24$$

$$L = 2L^2 12$$

$$L2 - 12L = 02$$

$$L (L - 6) = 02$$

$$L = 6$$

وحيث أنه تم شرح ذلك مسبقاً فإنه يتم اختيار $L = 6$

ويتم التعويض في AP ، MP

$$MP = (24)(6) - 3(6) = 144 - 108 = 36$$

$$AP = (12)(6) - (6) 2 = 72 - 36 = 36$$

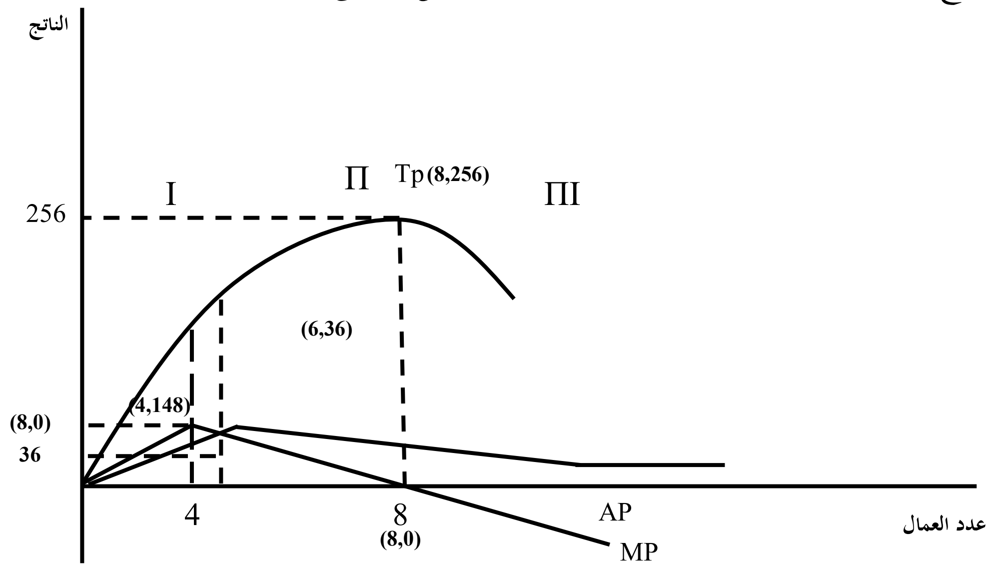
∴ عندما يصل عدد وحدات العمل 6 فإنه يتساوى الناتج الحدي مع المتوسط وعندها فعلاً يصل الناتج المتوسط أقصاه وهو 36 وحدة إنتاج وهى نهاية المرحلة الأولى .

ماذا يحدث لو تم افتراض أن الناتج الحدي يكون مساوياً للصفر؟

$$24L - 3L^2 = 0$$

$$3L\,(8 - L) = 0$$

وهى وكما تم ذكره عندما كانت $L = 8$ وصل الناتج الكلى أقصاه وهو 256 عندها الناتج الحدي يساوى صفر فتكون عدد وحدات العمل 8 وهى نهاية المرحلة الثالثة.



مما سبق يتضح أن الناتج الحدي بلغ أقصاه أولاً وعند بداية نقطة الانعكاس (الانقلاب) للناتج الكلى ثم بلوغ الناتج المتوسط أقصاه بعدها مباشرةً عندما تساوى مع الناتج الحدي وهى نقطة نهاية المرحلة الأولى، وبداية المرحلة الثانية وهى المرحلة الاقتصادية ثم

بعد ذلك عندما يصل الناتج الحدي صفر، ووصول الناتج الكلى أقصاه وهى نهاية المرحلة الثانية وبداية المرحلة الثالثة .

مثال (6) :

إذا كانت معادلة الطلب علي إحدى المنتجات الزراعية في إحدى المزارع هي:

$$P = \frac{80 - q}{4} = 20 - \frac{1}{4} q$$

حيث P تمثل السعر و q هي الكمية المطلوبة .

المطلوب : عند أي مستوي من الإنتاج يصل الإيراد الكلي إلي أقصاه .

الحل :

أولاً : يتم حساب دالة الإيراد الكلي وكالتالي:

$$TR = P.q$$

$$TR = (\frac{80 - q}{4})\, q$$

$$TR = \frac{80q - q^2}{4}$$

$$TR = 20q - \frac{1}{4} q^2$$

ولتقدير الإنتاج الذي يحقق أقصى إيراد كلي، فإنه يتم ذلك عن طريق أخذ المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي وكالاتي :

$$TR' = \frac{dTR}{dq} = 20 - (2)\frac{1}{4}q$$

$$TR' = \frac{dTR}{dq} = 20 - \frac{1}{2}q = 0$$

$$\frac{dTR}{dq} = 20 = \frac{1}{2}q$$

$$q = 20 \times 2$$

$$q = 40$$

وللتأكد من أنه عندما يكون الإنتاج 40 وحدة يحقق أقصى إيراد كلي فإنه يتم اللجوء لأخذ المشتقة الثانية لدالة الإيراد الكلي.

$$TR'' = \frac{d^2TR}{dq^2} = -\frac{1}{2} < 0$$

وحيث أن نتيجة المشتقة الثانية كانت سالبة ($-\frac{1}{2}$) ، فإن كمية الإنتاج المتحصل عليها وهي 40 وحدة تحقق شرط النهاية العظمى.

ويمكن إيجاد إحداثيات النهاية العظمى للإيراد بالتعويض عن q = 40 في الدالة الأصلية .

$$TR_{q=40} = \frac{80q - q^2}{4} = \frac{(80)(40) - (40)^2}{4}$$

$$TR = \frac{3200 - 1600}{4} = 400$$

$$q \leftarrow (\,40،400) \rightarrow TR$$

عندما q = 40 يصل الإيراد الكلي أقصاه وهي 400 وحدة نقدية .

مثال (7) :

إذا علمت أن لمنشأة في سوق تنافسي دالة تكاليف كلية هي على الشكل التالي :

$$TC = Q^3 - 9Q^2 + 33Q + 10$$

حيث TC تمثل التكاليف الكلية و Q هو الناتج.

فأحسب مستوى الإنتاج الذي يحقق أعلى (أقصى) إيراد، علماً بأن سعر البيع هو:

. $P=18$

الحل:

لإيجاد مستوى الإنتاج الذي يحقق أقصى إيراد ممكن فإنه يتعين الحصول على دالة الربح (π) ومن إجراء المشتقة الأولى لها ومساواتها بالصفر وكالتالي :

$$TR = P.Q$$

$$TR = 18Q$$

$$\pi = TR - Tc$$

$$\pi = 18Q - \left(Q^3 - 9Q^2 + 33Q + 10\right)$$

$$\pi = 18Q - Q^3 + 9Q^2 - 33Q - 10$$

$$\pi = Q^3 + 9Q^2 - 15Q - 10$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = -3Q^2 + 18Q - 15 = 0$$

$$Q = -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Q = \frac{-18 \pm \sqrt{(18)^2 - 4(-3)(-15)}}{2(-3)}$$

$$Q = \frac{-18 \pm \sqrt{144}}{-6}$$

$$Q = \frac{-18 \pm 12}{-6}$$

إما Q = 1 أو Q = 5 وللتأكد من أي الكميتين تحقق شروط النهاية العظمى، يتم إجراء المشتقة الثانية لدالة الربح حيث يتم فيها التعويض بتلك الكميتين وكالتالي:

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6Q + 18$$

$$\left.\frac{d^2\pi}{dQ^2}\right|_{Q=1} = (-6)(1) + 18 = 12 > 0$$

عند Q = 1 فإن قيمة الربح تكون = $(-1)^3 + 9\,(1)^2 - 15\,(1) - 10$

(π) = - 17

∴ عندما Q = 1 فإنها تعطي النهاية الصغرى للدالة التي إحداثياتها (−17، 1)

حيث لا يوجد ربح بالسالب فتستبعد وهذا ليس المستوى الأمثل للإنتاج، وعليه يتم اللجوء للكمية الثانية للناتج وهي 5 وحدات.

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2_{Q=5}} = (-6)\,(5) + 18 = -12 < 0$$

$$\pi = -Q3 + 9Q^2 - 15Q - 10$$

$$\underset{Q=5}{\pi} = -(5)^3 + 9(5)^2 - 15(5) - 10$$

$$\pi = -125 + 225 - 75 - 10$$

$$\pi = 100 - 75 - 10$$

$$\pi = 15$$

إحداثيات النهاية العظمى (15، 5)

∴ النهاية عظمى عند استخدام المنشأة 5 وحدات من المورد الإنتاجي يتحقق لها أكبر عائد وهو 15 وحده نقدية ويتحقق عندها الحجم الأمثل للإنتاج الذي يتحقق عند AVC أقل ما يمكن .

$$AVC = Q^2 - 9Q + 33$$

$$\frac{dAVC}{dQ} = 2Q - 9 = 0$$

$$Q = 4.5$$

$$\frac{d^2AVC}{dQ^2} = +2$$

طريقة أخرى للحل :

ويمكن الوصول إلى نفس النتائج أي الحجم الذي يحقق أقصى ربح الذي يتحقق عنده أكبر ربح في حالة المنافسة الكاملة عندما يتساوى الإيراد الحدي مع التكلفة الحدية أي أن:

$$MR = MC$$

$$MC = 3Q^2 - 18Q + 33$$

$$MR = 18$$

$$3Q^2 - 18Q + 33 = 18$$

$$3Q^2 - 18Q + 15 = 0$$

$$Q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Q = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(3)(15)}}{(2)(3)}$$

$$Q = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - (12)(15)}}{6}$$

$$Q = \frac{18 \pm \sqrt{144}}{6}$$

إما $$Q = \frac{18 + 12}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

أو $$Q = \frac{18 - 12}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

وبالتعويض في دالة الربح الأصلية يتم الحصول على نفس النتائج السابقة.

مثال (8) :

إذا كانت دالة الطلب لمشروع هي:

$$D = Q - 90 + 2P = 0$$

ودالة التكاليف المتوسطة هي:

$$ATc = Q^2 - 8Q + 57 + \frac{2}{Q}$$

المطلوب:

تحديد مستوى الإنتاج الذي:

أ. يعظم الإيراد الكلي.

ب . يدنى التكاليف الحدية .

ج . يعظم الأرباح.

الحل:

أ. للحصول على الإنتاج الذي يعظم الإيراد الكلي يتم إتباع الخطوات التالية:

$$\because Q - 9 + 2P = 0$$

$$\therefore 2P = 90 - Q$$

$$P = 45 - 0.5Q$$

$$TR = P.Q$$

$$\therefore TR = (45 - 0.5Q)Q$$

$$TR = 45Q - 0.5Q^2$$

$$\frac{dTR}{dQ} = 45 - Q = 0$$

$$\therefore Q = 45$$

$$\frac{d^2TR}{dQ^2} = -1 < 0$$

∴ النهاية عظمى

ومن هنا فإن TR يكون عند حده الأقصى عند تصل الكمية المنتجة إلى 45 وحدة منتجة . وعلية سيتم حساب إحداثيات تعظيم الإيراد الكلي كالآتي :

$$TR = 45Q - 0.5Q^2$$

$$TR = (45)(45) - (0.5\ )(45)^2$$

$$TR = 2025 - 1012.5$$

$$TR = 1012.5$$

وحدة نقدية إحداثيات النهاية العظمى للإيراد هي (1012.5، 45).

ب. حجم الإنتاج الذي يدني التكاليف يتم حسابه كالآتي:

$$ATC = \frac{Tc}{Q}$$

$$TC = ATc.Q$$

$$TC = \left(Q^2 - 8Q + 57 + \frac{2}{Q}\right).Q$$

$$TC = Q^3 - 8Q^2 + 57Q + 2$$

$$TC' = \frac{dTc}{dQ} = Mc = 3Q^2 - 16Q + 57$$

$$\frac{dMc}{dQ^2} = 6Q - 16$$

$$\frac{dMc}{dQ} = 6Q - 16 = 0$$

$$Q = \frac{+16}{6} = 2.7$$

$$\frac{d^2Mc}{dQ^2} = 6 > 0$$

∴ النهاية صغرى

ولذلك فإن التكاليف الحدية تصل أدنى نقطة لها عند كمية الناتج وهى 2.7 وحدة

إنتاج من هنا تكون التكاليف الحدية يساوي :

$$Mc_{2.7} = 3Q^2 - 16Q + 57$$

$$= 3(2.7)^2 - 16(2.7) + 57$$

$$Mc = 21.87 - 43.2 + 57$$

$$Mc = 35.67$$

(2.7 ،35.67)

مستوى الإنتاج 2.7 وحدة وهو الذي يدني التكاليف الحدية إلى 35.67 وحدة نقدية.

جـ. حجم الإنتاج الذي يعظم الربح يمكن الحصول عليه بإتباع الخطوات التالية:

$$\pi = TR - TC$$

$$\pi = 45Q - 0.5Q^2 - \left(Q^3 - 8Q^2 + 57Q + 2\right)$$

$$\pi = 45Q - 0.5Q^2 - Q^3 + 8Q^2 - 57Q - 2$$

$$\pi = -Q^3 + 7.5Q^2 - 12Q - 2$$

$$\frac{d\pi}{dQ} = \ 3Q^2 + \ 15Q - \ 12 = 0$$

$$Q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Q = \frac{-15 \pm \sqrt{(15)^2 - 4(-3)(-12)}}{2(-3)}$$

$Q = 1$ *أو* $Q = 4$ *إما*

ولمعرفة أيهما تحقق شرط النهاية العظمى (أي أقصى ربح) ، فإنه يتم حساب المشتقة الثانية لدالة الربح والتعويض بتلك الكميتين وكالتالي:

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6Q + 15 = 0$$

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2}_{Q=4} = (-6)(4) + 15$$

$$-24 + 15 = -9 < 0$$

∴ شرط النهاية عظمى يتحقق عند إنتاج 4 وحدات أي يتحقق أعظم ربح، حيث يمكن حساب قيمته وكالتالي:

$$\pi = -Q^3 + 7.5Q^2 - 12Q - 2$$

$$\pi = (-4)^3 + 7.5(4)^2 - 12(4) - 2$$

$$\pi = 6$$

أي أن إحداثيات النهاية العظمى لدالة الربح (6،4).

أما عندما Q = 1 فإن:

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2}_{Q=1} = (-6)(1) + 15$$

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2}_{Q=4} = (-6) + 15 = 9 \geq 0$$

∴ شرط النهاية الصغرى يتحقق وهذه الكمية تستبعد لأن الهدف هو تعظيم

الأرباح وليس تدنيتها .

طريقة أخرى للحل :

$$TR = 45Q - 0.5Q^2$$

$$Tc = Q^3 - 8Q^2 + 57$$

عند تعظيم الأرباح

$$MR = MC$$

$$45 - Q = 3Q^2 - 16Q + 57$$

$$-3Q^2 + 15Q - 12 = 0$$

$$Q = 1 \qquad\qquad Q = 4$$

وهى نفس النتيجة التي تم التوصل إليها بالطريقة السابقة .

مثال (9) :

لو تم افتراض أن مصنع ما ينتج سلعة (Q) وتكاليف إنتاجه(TC) على النحو التالي:

$$Tc = Q^3 - 59Q^2 + 1315Q - 2000$$

وكانت دالة العائد لهذا المصنع تمثلها الدالة التالية:

$$TR = 1000Q - 2Q^2$$

أوجد كمية الإنتاج لهذا المصنع التي يمكن منها الحصول على اكبر ربح ممكن :

الحل:

$$Tc = Q^3 - 59Q^2 + 1315Q + 2000$$

$$TR = 1000Q - 2Q^2$$

$$\pi = TR - Tc$$

$$\pi = \left(1000Q - 2Q^2\right) - \left(Q^3 - 59Q^2 + 1315Q - 2000\right)$$

$$\pi = 1000Q - 2Q^2 - Q^3 + 59Q^2 - 1315Q + 2000$$

$$\pi = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q + 2000 \longleftarrow \text{دالة الربح}$$

$$\frac{d\pi}{dQ} = -3Q^2 + 114Q - 315 = 0$$

باستخدام القانون السابق يتم الحصول على كميتي الإنتاج وهي Q = 3 أو Q = 35 .

وللتحقق من شرط النهاية العظمى يتم اللجوء للمشتقة الثانية حيث يتم التعويض عن تلك الكميتين وكالتالي:

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6Q + 114 = 0$$

$$\pi'' \left.\frac{d^2\pi}{dQ^2}\right|_{Q=35} = (-6 \times 35) + 114$$

$$\pi'' = -210 + 114 = -96 < 0$$

ونظراً لأن ناتج المشتقة الثانية عند التعويض بكمية الإنتاج Q = 35 سالبة.

∴ شرط النهاية العظمى قد تحقق، أي الربح يكون في أقصاه عندما Q = 35 أما عند ← Q = 3 فإن ناتج المشتقة الثانية يكون موجب.

$$\left.\frac{d^2\pi}{dQ^2}\right|_{Q=3} = (-6 \times 3) + 114$$

$$-18 + 114 = 96 > 0$$

أي يتحقق شرط النهاية الصغرى وهذا مستبعد لأن الهدف هو تعظيم الربح وليس تقليله. بمعنى أن الربح يتعظم عندما تكون الكمية المنتجة من المورد تساوي 35 ويكون قيمة الربح في هذه الحالة بنحو 13125 وحدة نقدية، حيث تم حسابها كالتالي:

$$\pi_{Q=35} = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q + 2000$$

$$\pi_{Q=35} = (-35)^3 + 57(35)^2 - 815(35) + 2000$$

$$\pi = -42675 + 65625 - 11625 + 2000$$

$$\pi = 13325$$

الطريقة الأخرى للحل في حالة المنافسة الكاملة.

$$MR = Mc$$

$$Q - 4Q = 3Q - 118Q + 1315$$

$$-3Q^2 + 113Q + 1315 = 0$$

$$Q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-113 \pm \sqrt{(113)^2 - 4(-3)(1315)}}{(2)(-3)}$$

$$Q = \frac{-113 \pm \sqrt{12769 + 15760}}{-6} =$$

عند 3 =Q ، Q =35 ويتحقق نفس النتائج في الطريقة السابقة .

مثال (10) :

إذا كانت دالة تكاليف لإنتاج سلعة ما في مصنع هي :

$$TC = \frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 111Q + 50$$

والطلب على هذه السلعة هو :

$$P = 100 - Q$$

أوجد الكمية التي تمكن هذا المصنع من الحصول على أكبر ربح .

الحل:

$$TC = \frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 111Q + 50$$
$$P = 100 - Q$$

$$\pi = TR - Tc$$

$$TR = P.Q$$

$$TR = (100 - Q)Q$$

$$TR = 100Q - Q^2$$

$$\pi = TR - Tc$$

$$= (100Q - Q^2) - \left(\frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 111Q + 50\right)$$

$$= 100Q - Q^2 - \frac{1}{3}Q^3 + 7Q^2 - 111Q - 50$$
$$\pi = -\frac{1}{3}Q^3 + 6Q^2 - 11Q - 50 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = -Q^2 + 12Q - 11 = 0$$

$$Q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Q = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(-1)(-11)}}{2 \times (-1)}$$

$$Q = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 44}}{-2}$$

$$Q = \frac{-12+10}{-2} \Rightarrow = Q \frac{-2}{-2} Q = 1 \quad \text{أو} \quad Q = \frac{-12-10}{-2} = \frac{-22}{-2} = 11$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q^2} = -2Q + 12 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q^{\ 2}} = -2Q + 12 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q}_{Q=11} = -22 + 12 = -10 < 0$$ ∴ النهاية عظمى

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_{Q=1}} = -2(1) + 12 = 0$$

$$-2 + 12 = 10 \geq 0$$

∴ النهاية صغرى وتستبعد قيمة Q = (1) لأنها تدني الربح.

بالتعويض في دالة الربح :

$$\pi_{Q=-11} = -\frac{1}{3}Q^3 + Q^2 - 11Q - 50$$

$$= -\frac{1}{3}\times(-11)^3 + 6(-11)^2 - 11(-11) - 50$$

$$\pi = -\frac{1}{3}\times(-1000) + 726 + 121 - 50$$

$$\pi = -333.3 + 726 + 121 - 50 = 463.7$$

عند إنتاج 11 وحدة يتعظم الربح ويساوي 463.7 وحدة نقدية

طريقة أخرى للحل في حالة المنافسة الكاملة:

$$MR = MC$$

$$100 - 2Q = Q^2 - 14Q + 111$$

$$100 - 2Q - Q^2 + 14Q - 111 = 0$$

$$-Q^2 + 12Q - 11 = 0$$

$$Q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Q = \frac{-12 \pm \sqrt{144} - 4(-1)(-11)}{2\times(-1)}$$

$$Q = \frac{-12 \pm \sqrt{100}}{-2} \Rightarrow Q = \frac{-12 \pm 10}{-2}$$

$$Q = \frac{-12 + 10}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$Q = \frac{-12 - 10}{-2} = \frac{-22}{-2} = 11$$

وهى نفس النتيجة السابقة .

ب. التعظيم والتدنية في حالة متغيرين مستقلين:

يتم ذلك كالآتي :

أولاً : إجراء المشتقة الأولى (التفاضل الجزئي) لكل من المتغيرين بالدالة المراد تعظيمها أو تدنيتها.

ثانياً : حل المعادلتين (أي المشتقة الأولى لكل من المتغيرين) لإيجاد قيم المتغيرين أما بطريقة المصفوفات أو بطريقة الحذف أو بطريقة التعويض .

ثالثاً : لمعرفة ما إذا كانت القيم المتحصل عليها بعد حل المعادلتين تعطي نهاية عظمى أم صغرى لا بد من إجراء المشتقة الثانية للدالة المراد تعظيمها أو تدنيتها والحصول على محددة هيشيان (H).

$$H = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}$$

– إذا كانت قيم F_{11} و F_{22} موجبة حيث أن F_{11} تمثل المشتقة الثانية للدالة بالنسبة للمتغير

الأول، F_{22} تمثل المشتقة الثانية للدالة بالنسبة للمتغير الثاني. وقيمة المحدد موجبة إذن القيم المتحصل عليها للمتغيرين تعطي النهاية صغرى وإذا كانت F_{11} وF_{22} سالبة وقيمة المحدد موجب إذن القيم المتحصل عليها للمتغيرين تعطي النهاية عظمى.

- يتم التعويض بقيمة جذور المعادلة التي تم التحصل عليها باستخدام المشتقة الأولى في الدالة الأصلية فتعطي المطلوب سواءً تدنية أو تعظيم .

مثال (1) :

أوجد النهايات الصغرى والعظمى للدالة التالية :

$$Y = 5X_1^2 + 10X_2^2 + 12X_1X_2 - 4X_1 - 6X_2 + 1$$

الحل:

$$Y = 5X_1^2 + 10X_2^2 + 12X_1X_2 - 4X_1 - 6X_2 + 1$$

يتم إجراء المشتقة الأولى الجزئية للمتغيرين X_1 ، X_2 وكالتالي

$$\frac{\partial Y}{\partial X_1} = 10X_1 + 12X_2 - 4 = 0$$

$$\frac{dY}{dX_2} = 20X_2 + 12X_1 - 6 = 0$$

يتم تسوية المعادلتين السابقتين بالصفر ويتم حلهما باستخدام طريقة المصفوفات

$$12X_1 + 20X_2 = 6$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 20 \end{vmatrix} = 200 - 144 = 56$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{56} & \frac{-12}{56} \\ \frac{-12}{56} & \frac{10}{56} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\left(\frac{20}{56}\right) + 6\left(\frac{-12}{56}\right) \\ 4\left(\frac{-12}{56}\right) + 6\left(\frac{10}{56}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{80-72}{56} \\ \frac{-48+50}{56} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{56} \\ \frac{12}{56} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.21 \end{bmatrix}$$

حل آخر :

باستخدام طريقة الحذف :

بضرب المعادلة (1) في 5 $\quad (1) \quad 10X_1 + 12X_2 - 4 = 0$

بضرب المعادلة (2) في −3 $\quad (2) \quad 12X_1 + 20X_2 - 6 = 0$

$$50X_1 + \cancel{60X_2} - 20 = 0$$

$$-36X_1 - \cancel{60X_2} + 18 = 0$$

$$14X_1 - 2 = 0$$

$$14X_1 = 2$$

$$X_1 = \frac{1}{7}$$

بالتعويض في المعادلة (1) أو (2) ب $X_1 = \frac{1}{7}$

$$10X_1 + 12X_2 - 4 = 0$$

$$10 * \frac{1}{7} + 12X_2 - 4 = 0$$

$$12X_2 = \frac{4}{1} - \frac{10}{7}$$

$$12X_2 = \frac{28-10}{7}$$

$$12X_2 = \frac{18}{7}$$

$$X_2 = \frac{18}{7} \times \frac{1}{2}$$

$$X_2 = \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} =$$

$$X_2 = \frac{3}{14}$$

لمعرفة ما إذا كانت قيم X_1 ، X_2 المتحصل عليهما تحققان شرط النهاية العظمى أم الصغرى فيتم اللجوء للمشتقة الثانية للدالة ثم تكوين مصفوفة هيشيان وكالتالي:

$$H = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$$

$$F_{11} = \frac{\partial^2 Y}{\partial X_1^2} = 10$$

$$F_{12} = F_{21} = \frac{\partial^2 Y}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial X_2 \partial X_1} = 12$$

$$F_{22} = \frac{\partial^2 Y}{\partial X_2^2} = 20$$

$$H = \begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 20 \end{vmatrix}$$

قيمة العنصر الأول F_{11} موجب وهو 10 وأيضاً قيمة F_{22} موجبة (20) أما قيمة المحدد فتساوي F_{11} ، F_{22} .

$$\Delta = 200 - 144 = 56$$

وحيث أن قيمتي F_{11} ، F_{22} موجبة وقيمة المحدد موجبة.

∴ قيمتي X_1 ، X_2 المتحصل عليهما تحققان شرط النهاية صغرى.

مثال (2):

لو تم افتراض أن دالة التكاليف لمصنع الحليب الذي يعمل بخطي إنتاج هي كالتالي.

$$TC = 2Q_1^2 + Q_1 Q_2 + 2Q_2^2$$

حيث Q_1 كمية الحليب المعقم، Q_2 كمية الحليب المبستر وسعر بيع الوحدة من $Q_1 = 12$ وسعر بيع الوحدة من $Q_2 = 18$ أوجد الكميات من الحليب المعقم والمبستر التي ينتجها المصنع لكي يتمكن من الحصول على أكبر صافي عائد.

الحل:

$$\pi = TR - TC$$

$$TR = 12Q + 18Q_2$$

$$\pi = 12Q_1 + 18Q_2 - \left(2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2\right)$$

$$\pi = 12Q_1 + 18Q_2 - 2Q_1^2 - Q_1Q_2 - 2Q_2^2$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 12 - 4Q_2 - Q_2 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 18 - Q_1 - 4Q_2 = 0 \qquad (2)$$

يتم ضرب المعادلة (1) في (−4) :

$$-48 + 16Q_1 + 4Q_2 = 0$$

$$18 - Q_1 - 4Q_2 = 0$$

بالجمع

$$-30 + 15Q_1 = 0$$

$$\therefore 15Q = 30 \qquad \therefore Q_1 = 2$$

بالتعويض عن قيمة Q_1 في معادلة (1) للحصول على قيمة Q_2 .

$$12 - 4Q_1 - Q_2 = 0$$

$$12 - 4(2) - Q_2 = 0$$

$$12 - 8 - Q_2 = 0$$

$$4 - Q_2 = 0$$

$$Q_2 = 4$$

لمعرفة هل القيم المتحصل عليها لكل من Q_1 ، Q_2 تحققان شرط النهاية العظمى،

يتم ذلك عن طريق المشتقة الجزئية الثانية للدالة الرئيسية وتكوين مصفوفة هيشيان.

$$H = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 16 - 1 = 15$$

وحيث أن قيمة π_{11} ، π_{22} سالبتين ، بينما محدد المصفوفة موجب .

∴ عندما $Q_1 = 2$ ، $Q_2 = 4$ النهاية عظمى تحققان شرط النهاية العظمى، بمعنى عند إنتاج 2 وحدة من الحليب المعقم و4 وحدات إنتاج من الحليب المبستر تمكن هذا المصنع من الحصول على أكبر صافي عائد (أكبر ربح).

مثال (3):

لو تم افتراض أن دالة التكاليف لمصنع البطاطين بالمرج تمثلها العلاقة التالية :

$$Tc = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$$

حيث: Q_1 = عدد البطاطين ، $Q2$ = عدد الفرش.

سعر بيع Q_1 تمثله الدالة التالية: $P_1 = 55 - Q_1 - Q_2$

سعر بيع Q_2 تمثله الدالة التالية: $P_2 = 70 - Q_1 - 2Q_2$

أوجد كمية Q_1 و Q_2 التي تجعل المصنع يحصل على أقصى ربح، ثم أوجد قيمة سعر السلعتين عند تلك الكميتين.

الحل :

$$\pi = TR - Tc$$

$$TR = P_1.Q_1 + P_2.Q_2$$

$$TR = (55 - Q_1 - Q_2)Q_1 + (70 - Q_1 - 2Q_2).Q_2$$

$$TR = 55Q_1 - Q_1^2 - Q_1Q_2 + 70Q - Q_1Q_2 - 2Q_2^2$$

$$\pi = TR - TC$$

$$TR = -Q_1^2 - 2Q_1Q_2 + 55Q_1 + 70Q_2 - 2Q_2^2$$

$$\pi = -Q_1^2 - 2Q_1Q_2 + 55Q_1 + 70Q_2 - 2Q_2^2 - \left(Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2\right)$$

$$\pi = -Q_1^2 - 2Q_1Q_2 + 55Q_1 + 70Q_2 - 2Q_2^2 - Q_1^2 - Q_1Q_2 - Q_2^2$$

$$\pi = -2Q_1^2 - 3Q_1Q_2 + 55Q_1 + 70Q_2 - 3Q_2^2$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = -4Q_1 - 3Q_2 + 55 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = -3Q_1 + 70 - 6Q_2 = 0 \qquad (2)$$

بضرب المعادلة (1) في (−2)

$$8Q_1 + 6Q_2 - 110 = 0$$

$$\underline{-3Q_1 - 6Q_2 + 70 = 0}$$

$$5Q_1 - 40 = 0 \ \rightarrow Q = 8$$

بالتعويض في إحدى المعادلتين بكمية Q_1 لغرض

الحصول على كمية Q_2 .

$$4Q_1 - 3Q_2 + 55 = 0$$

$$4(8) - 3Q_2 + 55 = 0$$

$$32 - 3Q_2 + 55 = 0$$

$$23 = 3Q2$$

$$Q_2 = \frac{23}{3}$$

$$Q_2 = 7.\frac{2}{3}$$

محدد هيشيان

$$H = \begin{vmatrix} F_{12} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}$$

$$H = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}$$

الرقم الأول سالب 4-

$$\Delta = 24 - 9 = 15$$

سالب موجب

∴ النهاية عظمى.

عند إنتاج 8 وحدات من البطاطين 7.6 من الفرش يتحصل هذا المصنع على أكبر ربح وعند سعره للسلعتين على الترتيب هو :

$$P = 55 - Q_1 - Q_2$$

$$P = 55 - 8 - 6.7$$

$$P = 39.4$$ سعر البطانية بالدينار

$$p_2 = 70 - Q_1 - 2Q_2$$

$$p_2 = 70 - 8 - 2(7.6)$$

$$p_2 = 70 - 8 - 15.2$$

$$p_2 = 46.8$$ سعر الفرشة بالدينار

مثال (4):

لو تم افتراض أن نفس المصنع في المثال السابق ونفس الإنتاج وكانت دالة تكاليف الإنتاج :

$$Tc = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2$$

حيث أن Q_1 = عدد البطاطين Q_2 = الفرش

$$P_1 = 10D \qquad P_2 = 18D$$

أوجد كمية الفرش والبطاطين المنتجة في هذا المصنع التي تحقق أكبر ربحاً .

الحل :

$$\pi = TR - Tc$$

$$TR = P_1.Q_1 + P_2.Q_1$$

$$= 10Q_1 + 18Q_2$$

$$\pi = 10Q_1 + 18Q_2 - 2Q_1^2 - Q_1Q_2 - 2Q_2^2$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 10 - 4Q_1 - Q_2 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 18 - Q_1 - 4Q_2 = 0 \qquad (2)$$

بضرب المعادلة (1) في -4

$$-40 + 16Q_1 + \cancel{4Q_2} = 0$$

$$18 - Q_1 - \cancel{4Q_2} = 0$$

$$-22 + 15Q_1 = 0$$

$$15Q1 = 22$$

$$Q_1 = \frac{22}{15} = 1.5$$

بالتعويض في المعادلة (1) ب$Q = 1.5$

$$-40 + 16Q_1 + 4Q_2 = 0$$

$$-40 + 16(1.5) + 4Q_2 = 0$$

$$-40 + 24 + 4Q_2 = 0$$

$$-16 + 4Q2 = 0$$

$$-16 = -4Q_2$$

$$Q_2 = 4$$

محدد هيشيان

$$H = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}$$

$$H = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 16 - 1 = 15$$

F_{11} ، F_{12} سالب، وقيمة المحدد موجبة، ∴ النهاية عظمى .

∴ الكميات من الإنتاج $Q_1 = 1.5$, $Q_2 = 4$ عند إنتاجها يتحقق لهذا المصنع أعلى ربح وبالتعويض في دالة الربح عن قيمة Q_1 ، Q_2 فيتم الحصول على قيمة هذا الربح

بالوحدات النقدية .

جـ. **التعظيم والتدنية في حالة أكثر من متغيرين مستقلين**

لإيجاد النهاية وإذا ما كانت عظمى أو صغرى في حالة ثلاثة متغيرات مستقلة يتم ذلك كالآتي :

1. إيجاد التفاضل الأول بالنسبة لكل متغير من المتغيرات الثلاثة ومن خلال ذلك يتم إيجاد الجذور أي إيجاد قيمة أو كمية كل متغير في كل حالة.

2. يتم إيجاد محدد هيشيان.

$$H = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}$$

3. إذا كان قيمة كل F_{11} موجبة ومحدد المصفوفة الثنائية موجبة $H = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{11} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}$ ومحدد المصفوفة الثلاثية $H = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}$ موجبة فإن الكمية أو القيمة المتحصل عليها لكل متغير تحقق شرط النهاية الصغرى.

أما إذا كانت قيمة F_{11} سالب ومحدد المصفوفة الثنائية $H = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}$ موجب ومحدد المصفوفة الثلاثية $H = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}$ سالب القيمة أو الكمية لتلك المتغيرات فإن الدالة الرئيسية تحقق شرط النهاية سالب موجب سالب.

∴ النهاية عظمى.

مثال (1) :

مصنع الجبل الأخضر لعصير الفواكه ينتج بثلاثة خطوط هي (العصير المركز – السانتوب – المربى) فإذا علمت أن سعر البيع لكل هذه السلع المنتجة تمثلها الدوال التالية:

$$P_1 = 63 - 4Q_1$$

$$P_2 = 105 - 5Q_2$$

$$P_3 = 75 - 6Q_3$$

ودالة التكاليف الكلية للإنتاج هي :

$$TC = 20 + 15Q$$

حيث Q هي $(Q_1 + Q_2 + Q_3)$ أوجد السعر والكمية لهذه الخطوط الثلاثة لكي يحقق المصنع أكبر صافي عائد

الحل:

$$\pi = TR - TC$$

$$TR = P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3$$

$$TR = 63Q_1 - 4Q^2{}_1 + 105Q_2 - 5Q^2{}_2 + 75Q_3 - 6Q^2{}_3$$

$$\pi = 63Q_1 - 4Q^2{}_1 + 105Q_2 - 5Q^2{}_2 + 75Q_3 - 6Q^2{}_3 - (20 + 15Q)$$

$$\pi = 63Q_1 - 4Q^2{}_1 + 105Q_2 - 5Q^2{}_2 + 75Q_3 - 6Q^2{}_3 - 20 + 15Q_1 + 15Q_2 + 15Q_3$$

$$\pi = 48\,Q_1 - 4Q^2_1 + 90Q_2 - 5\,Q^2_2 + 60Q_3 - 6Q^2_3 - 20$$

$$\frac{dy}{dQ_1} = 48 - 8Q_1 = 0 \Rightarrow 48 = 8Q_1$$

$$Q_1 = 6$$

$$\frac{dy}{dQ_2} = 90 - 10Q_2 = 0 \quad \Rightarrow 90 = 10Q_2$$

$$Q_2 = 9$$

$$\frac{dy}{dQ_3} = 60 - 12Q_3 = 0 \Rightarrow 60 = 12Q_3$$

$$Q_3 = 5$$

وللتأكد من أن كميات Q_1 ، Q_2 ، Q_3 المتحصل عليها تحقق شرط النهاية العظمى ويتم إجراء المشتقة الثانية الجزئية لدالة الربح بالنسبة للمتغيرات Q_1 ، Q_2 ،Q_3 وتكوين مصفوفة هيشيان الثلاثية وكالتالي:

$$H = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{vmatrix}$$

$$H = \begin{vmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{2\times 2} = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -10 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 80 - 0 = 80$$

$$H = \left|\begin{matrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -8 & 0 \\ 0 & -10 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\Delta H = -960 - 0 = -960$$

وحيث أن قيمة π_{11} الرقم الأول بالمصفوفة –8 وهو سالب والمحدد من الرتبة 2×2 قيمته تساوي 80 وهى قيمة موجبة والمحدد من الرتبة الثالثة لمصفوفة هيشيان قيمته = 960 وهى سالبة .

∴ هذا المصنع يحقق نهاية عظمي أي يتحقق تعظيم للربح (صافي عائد) في حالة إنتاج 6 وحدات من العصير المركز و9 من السانتوب و 5 وحدات من المربى .

وقيمة سعر البيع الذي يتحقق عنده ذلك يتم التعويض بكمية Q_1 في كل مرة.

$$\because P_1 = 63 - 4Q_1$$

$$P_1 = 63 - 4 \times 6$$

$$P_1 = 63 - 24$$

$$\therefore P_1 = 39$$

$$\because P_2 = 105 - 5Q_2$$

$$\because P_2 = 105 - 5\,(9)$$

$$\therefore P_2 = 105 - 45$$

$$\therefore P_2 = 60$$

$$\therefore P_3 = 75 - 6Q_3$$

$$P_3 = 75 - 6\,(5)$$

$$\therefore P_3 = 75 - 30$$

$$\therefore P_3 = 45$$

مثال (2):

إذا كانت

$$Y=-16X_1+4X_1^2-30X_2+5X_2^2-20X_3+2X_3^2$$

بين ما إذا كانت X_3, X_2, X_1 تحقق نهاية عظمى أم صغرى .

الحل:

$$\frac{dY}{dX_1}=-16+8X_1=0$$

$$X_1=2$$

$$\frac{dY}{dX_2}-30+10X_2=0$$

$$X_2=3$$

$$\frac{dY}{dX_3}=-20+4X_3=0$$

$$X_3=5$$

$$\Delta_{2\times2}=\begin{vmatrix}8 & 0\\ 0 & 10\end{vmatrix}=80$$

$$H=\left|\begin{array}{ccc|cc}8 & 0 & 0 & 8 & 0\\ 0 & 10 & 0 & 0 & 10\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0\end{array}\right.$$

0 0 0 (320+0+0)

$$\Delta = 320$$

قيمة الرقم الأول موجب 8 والمحدد من الرتبة 2×2 موجب تساوي 80 وهي موجب

والمحدد من الرتبة 3×3 قيمته = 320 وهي موجبة .

∴ هذه القيم الثلاثة لـ X_1 ، X_2 ، X_3 ، تحقق نهاية صغرى.

موجب موجب موجب

∴ النهاية صغرى .

مثال (3):

إذا كانت:

$$Y = 2X_1^2 + X_1X_2 + 4X_2^2 + X_1X_3 + X_3^2 + 2$$

بين ما إذا كانت X_3, X_2, X_1 تحقق نهاية عظمى أم صغرى .

الحل:

$$\frac{dY}{dX_1} = 4X_1 + X_2 + X_3 = 0$$

$$\frac{dY}{dX_2} = X_1 + 8X_2 + 0 = 0$$

$$\frac{dY}{dX_3} = X_1 + 0 + 2X_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث $[\quad]^{-1}$ معكوس المصفوفة أي المصفوفة A^{-1} .

$X_1 = 0$ $\qquad$ $X_2 = 0$ $\qquad$ $X_3 = 0$

$$H = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}$$

$$H = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{2\times 2} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 1 = 31$$

$$\Delta_{3\times3}H = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 1 \\ 1 & 8 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

$(8+0+2) \qquad\qquad (64+0+0)$

$$\Delta_{3\times3} = 54$$

موجب   موجب   موجب

∴ النهاية صغرى

النهايات العظمى والصغرى المقيدة

وهى تعنى إيجاد النهاية العظمى أو الصغرى لدالة ولكن في حالة وجود شرط قيد كشرط الدخل أو التكاليف فمثلاً:

- شخص يرغب في تعظيم المنفعة عرضة لقيد الدخل .
- منشأة ترغب في تعظيم الإنتاج عرضة قيد التكاليف .
- منشأه ترغب في تعظيم الإيراد الكلى عرضة لقيد التكاليف.
- يسمى الهدف المرغوب أو المطلوب هو دالة الهدف أي هو ما يسعى إلية المنتج أو المستهلك أو الشركة أو المنشأة أو المجتمع ككل لتحقيقه ، أما القيد هو الشرط الذي يحد من تحقيق دالة الهدف ويمكن ربط دالة الهدف بدالة القيد بواسطة دالة لاجرانج.

$Y=F(X_1,X_2,.........X_n)$ ← هي دالة الهدف ويكون تعظيمها أو تقليلها بناءاً على شرط القيد .

دالة لاجرانج = دالة الهدف + مضروب لاجرانج

$L = Y + \lambda$ (شرط القيد)

وبعد ذلك يتم إيجاد النهاية العظمى أو الصغرى كآلاتي :

أولاً : إجراء المشتقة الأولى لدالة لاجرانج باستخدام التفاضل الجزئي لإيجاد جذور المعادلات أي إيجاد X_1,X_2 ، λ .

$$\frac{dl}{dx_1} = 0 \qquad \frac{dl}{dx_2} = 0 \qquad \frac{dl}{dx_\lambda} = 0$$

ثانياً : إجراء المشتقة الثانية :

$$H = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{1\lambda} \\ L_{21} & L_{22} & L_{2\lambda} \\ L_{\lambda 1} & L_{2\lambda} & L_{3\lambda} \end{vmatrix}$$

ثالثاً : إذا كان قيمة المحدد (H) موجبة فالقيم المتحصل عليها من حل المعادلات الثلاثة (معادلات المشتقة الأولى الجزئية) تحقق شرط النهاية العظمى، أما إذا كان قيمة المحدد سالبة فيتحقق شرط النهاية الصغرى .

مثال (1) :

أوجد قيمX_1، X_2 اللذان يحققان شرط النهاية الصغرى أو العظمى لهذه الدالة :

$$Y = X^2_1 + 2X_1X_2$$

بمعلومية أن هناك شرط القيد التالي:

$$- X_1 + 3X_2 = 1$$

الحل:

يتم تحويل دالة الشرط إلى دالة صفرية كالآتي:

$$1+X_1 -3X_2 = 0$$

$$L = X^2_1 +2X_1X_2 + \lambda (1 + X_1 - 3X_2)$$

$$L = X^2_1 +2X_1X_2 + \lambda + \lambda X_1 - 3X_2 \lambda$$

$$\frac{dl}{dx_1} =2x_1 + 2x_2 + \lambda = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{dl}{dx_2} =2x_1 - 3\lambda = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{dl}{dx_\lambda} = 1 - x_1 - 3 x_2 = 0 \qquad (3)$$

لو تم اختيار طريقة المصفوفات لإيجاد قيمة X_1,X_2 ، λ .

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right.$$

$$\Delta = (0 - 6 - 6) \; - \; (0+18+0)$$

$$\Delta = -12 - 18 = -30$$

$$\text{مصفوفة المرافقات} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{-9} & \mathbf{-3} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-1} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{8} & \mathbf{-4} \end{bmatrix} \qquad =$$

المصفوفة المحورة :

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{-9}{-30} & \frac{-3}{-30} & \frac{-6}{-30} \\ \frac{-3}{-30} & \frac{-1}{-30} & \frac{8}{-30} \\ \frac{-6}{-30} & \frac{8}{-30} & \frac{-4}{-30} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{30} & \frac{3}{30} & \frac{6}{30} \\ \frac{3}{30} & \frac{1}{30} & \frac{8}{30} \\ \frac{6}{30} & \frac{8}{30} & \frac{4}{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X_1} = \frac{-6}{30} \qquad \mathbf{X_2} = \frac{-8}{30} \qquad \mathbf{X_3} = \frac{-4}{30}$$

∵ قيمة المحدد H سالبة وبالتالى تكون قيم $X_1 = -\frac{6}{30}$ ، $X_2 = -\frac{8}{30}$ ، $\lambda = -\frac{4}{30}$

تحقق الشرط النهاية الصغرى لأن محدد المصفوفة كان سالباً (− 30).

مثال (2) :

إذا تم شراء سلعتين X_1،X_2 وكانت دالة الإشباع هي:

$$U = X_2\, X_1$$

ومقيد بشرط المال وهو 6 دينار ليتم إنفاقها على X_2,X_1 وكانت دالة الشرط هي :

$$2X_1 - X_2 = 6$$

الحل :

شرط القيد

$$6-2X_1 - X_2 = 0$$

$$L = X_2 X_1 + \lambda (6 - 2X_1 - X_2)$$

$$L = X_2 X_1 + 6\lambda - 2X_1 \lambda - X_2 \lambda$$

$$\frac{dl}{dx_1} = x_2 - 2\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad X_2 = 2\lambda \text{.....................(1)}$$

$$\frac{dl}{dx_2} = x_1 - \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad X_1 = \lambda \text{.....................(2)}$$

$$\frac{dl}{d\lambda} = 6 - 2x_1 + x_2 = 0 \quad \text{.........................(3)}$$

باستخدام طريقة التعويض في الدالة رقم (3)

$$\mathbf{6 - 2X_1 - X_2 = 0}$$
$$6 - 2(\lambda) - 2(\lambda) = 0$$

$$6 - 2\lambda - 2\lambda = 0$$

$$6 - 4\lambda = 0$$

$$6 = 4\lambda$$

$$\lambda = \frac{6}{4} = 1.5$$

$$X_2 = 2\lambda\_ \; X_2 = 3$$

$$H = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right.$$

(0 ،+0 ،0+)　　　　　　　　(+0 ،2+ ،2+)

$$\Delta = 4$$

وحيث أن قيمة محدد هيشيان موجبة فإن الكميتين المتحصل عليهما من X_1 ، X_2 تحققان شرط النهاية العظمى .

وبالتالي باستخدام 1.5 وحدات من السلعة الأولى، 3 من السلعة الثانية عند شرائها يتحقق لهذا المستهلك أقصى إشباع في ظل وجود شرط المال وهو 6 دينار.

مثال (3):

بفرض أن مستهلك يملك دخل قدرة 100 دينار وإنه يرغب في أن يستهلك سلعتين X_1,X_2، فإذا علمت أن ثمن $P_{X_1}=2$ دينار، وأن ثمن السلعة الثانية $P_{X_2} = 5$ دينار .

المطلوب :

أ. تحديد الكمية التوازنية التي يستطيع المستهلك الحصول عليها من هاتين السلعتين إذا علمت أن دالة الإشباع أو المنفعة هي $U= X_2\, X_1$.

ب. لو فرض أن دخل المستهلك زاد إلى 150 دينار هل يزيد المستهلك في استهلاك

السلعتين أم لا في حالة ثبات نفس السعر ؟

ج. لو فرض أن دخل المستهلك زاد إلى 150 دينار مع زيادة سعر السلعة الأولى إلى 3 دينار والثانية إلى 10 دينار ماذا يحدث في هذه الحالة ؟ وضح بالرسم كل الحالات السابقة .

الحل:

$$U = X_2 X_1$$

$$\square X_1 + 5 X_2 = 100$$

$S.T\ \ 100 - 2X_1 + 5 X_2 = 0$ شرط القيد

$$L = X_2 X_1 + \lambda (100 - 2X_1 + 5 X_2)$$

$$L = X_2 X_1 + 100\lambda - 2X_1 \lambda - 5 X_2 \lambda$$

$$\frac{dl}{dx_1} = x_2 - 2\lambda = 0 \quad (1) \rightarrow \quad X_2 = 2\lambda$$

$$\frac{dl}{dx_2} = X_1 - 5\lambda = 0 \quad (2) \rightarrow \quad X_1 = 5\lambda$$

$$\frac{dl}{d\lambda} = 100 - 2X_1 + 5 X_2 = 0 \quad \rightarrow (3)$$

باستخدام طريقة التعويض في الدالة رقم (3)

$$100 - 2(5\lambda) + 5(2\lambda) = 0$$

$$100 - 10\lambda - 10\lambda = 0$$

$$100 = 20\lambda$$

$$\boldsymbol{\lambda = 100/20 = \lambda = 5}$$

ومنها

$$\mathbf{X_1 = (5)(5) = 25}$$

$$\mathbf{X_1 = (2)(5) = 10}$$

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & -5 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & -5 \end{matrix}$$

$$\Delta H = (20 - 0)$$

$$\Delta H = 20$$

∵ قيمة محدد هيشيان موجبة فالنهاية عظمى .

وحيث أن قيمة محدد هيشيان موجبة فإن الكميتين المتحصل عليهما من X_1 ، X_2 تحققان شرط النهاية العظمى .

أي عند شراء 25 وحدة من X_1 بسعر 2 دينار وشراء 10 وحدات من X_2 بسعر 5 دينار يحقق لهذا المستهلك أقصى إشباع في ظل وجود الشرط وهو الدخل الذي مقداره 100 دينار .

(ب) إذا زاد الدخل إلى 150 دينار في ظل نفس الأسعار.

$$\mathbf{U = X_2 X_1}$$

$$\square X_1 + 5\,X_2 = 150$$

$S.T = 150 - 2X_1 + 5\,X_2 = 0$ دالة الشرط

$$L = X_2, X_1 + \lambda\,(150 - 2X_1 + 5\,X_2)$$

$$L = X_2, X_1 + 150\lambda - 2X_1\,\lambda - 5\,X_2\,\lambda$$

$$\frac{dl}{dx_1} = x_2 - 2\lambda = 0 \quad (1) \quad \rightarrow \quad x_2 = 2\lambda$$

$$\frac{dl}{dx_2} = x_1 - 5\lambda = 0 \quad (2) \quad \rightarrow \quad x_1 = 5\,\lambda$$

$$\frac{dl}{d\lambda} = 150 - 2X_1 + 5\,X_2 = 0 \ (3)$$

باستخدام طريقة التعويض في الدالة رقم (3)

$$\mathbf{150 - 2(5\lambda) + 5\,(2\lambda) = 0}$$

$$\mathbf{150 - 10\,\lambda - 10\,\lambda = 0}$$

$$\mathbf{150 = 20\,\lambda}$$

$$\lambda = \frac{150}{20}$$

$$\boldsymbol{\lambda = 7.5}$$

ومنها

$$\mathbf{X_2} = (\mathbf{2})\,(\mathbf{7.5}) \;=\; \mathbf{15}$$

$$\mathbf{X_1} = (\mathbf{5})\,(\mathbf{7.5}) \;=\; \mathbf{37.5}$$

$$H = \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & -5 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & -5 \end{array}$$

$$\Delta H = 20$$

قيمة محدد هيشيان موجبة فإن الكميتين المتحصل عليهما من X_1 ، X_2 تحققان شرط النهاية عظمى.

إن استهلاك 37.5 وحدة من السلعة الأولى و15 وحدة من السلعة الثانية يتحقق لهذا المستهلك أعلى إشباع عند سعر 2 دينار ل X_1 و5 دينار ل X_2 في حالة وجود دخل قدرة 150 دينار ويلاحظ زيادة الاستهلاك في حالة زيادة الدخل ل 150 دينار عنه في حالة 100 دينار حيث زاد الاستهلاك من 25 إلى 37.5 من السلعة الأولى ومن 10 إلى 15 من السلعة الثانية وذلك يعني إنه كلما زاد الدخل زاد الاستهلاك ولكن طبقاً لقانون تناقص المنفعة .

(ج) إذا زاد سعر السلعة الأولى إلى 3 دينار والثانية إلى 10 دينار والدخل بقى 150 دينار.

$$\boldsymbol{U} = \mathbf{X_2\,X_1}$$

$$\square\mathbf{X_1} + \mathbf{10\,X_2} = \mathbf{150}$$

$$\boldsymbol{S.T}\;\mathbf{150} - \mathbf{3X_1} + \mathbf{10\,X_2} = \mathbf{0}$$

$$L = X_2X_1 + \lambda(150 - 3X_1 + 10X_2)$$

$$L = X_2X_1 + 150\lambda - 3X_1\lambda - 10X_2\lambda$$

$$\frac{dl}{dx_1} = X_2 - 3\lambda = 0 \quad (1) \rightarrow \quad X_2 = 3\lambda$$

$$\frac{dl}{dx_2} \boldsymbol{X}_1\ 10\lambda = 0 \quad (2) \rightarrow \quad X_1 = 10\lambda$$

$$\frac{dl}{d\lambda} = 150 - 3X_1 + 10X_2 = 0 \qquad (3)$$

باستخدام طريقة التعويض في الدالة رقم (3)

$$150 - 3(10\lambda) + 10(3\lambda) = 0$$

$$150 - 30\lambda - 30\lambda = 0$$

$$150 = 60\lambda$$

$$\lambda = \frac{150}{60}$$

$$\lambda = 2.5$$

ومنها

$$X_2 = (3)(2.5) = 7.5$$

$$X_1 = (10)(2.5) = 25$$

$$H = \left| \begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -10 & 1 & 0 \\ -3 & -10 & 0 & -3 & -10 \end{array} \right.$$

$$\Delta = 60$$

قيمة محدد هيشيان موجبة فإن الكميتين المتحصل عليهما من X_1 ، X_2 تحققان شرط النهاية العظمى.

وبما أن الدخل زاد إلى 150 دينار وأرتفع السعر للسلعتين إلى 3 ، 10 دينار فإن المستهلك يحقق أكبر منفعة عند استهلاك 25 وحدة من السلعة الأولى، 7.5 وحدة من السلعة الثانية وأن الكمية المستهلكة قلت من 37.5 إلى 25 وحدة من السلعة الأولى ومن 5 إلى 7.5 من السلعة الثانية بسب ثبات الدخل وارتفاع الأسعار أي أن ثبات الدخل وارتفاع الأسعار يحد من زيادة الطلب على الغذاء مما يقلل حجم الإنتاج في النهاية .

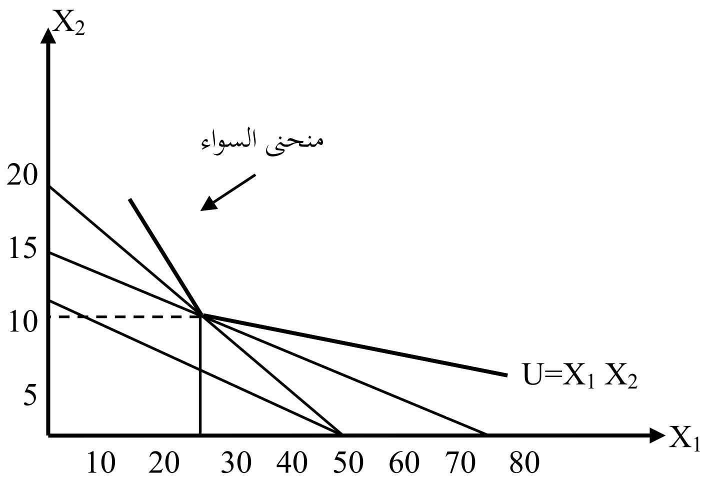
تعريف خط الميزانية :

يمثل إمكانية الاستهلاك في ظل الدخل المحدود.

$X_1 = \frac{100}{2} = 50$ الدخل لو انفق على السلعة الأولى (أ).

$X_2 = \frac{100}{2} = 20$ الدخل لو انفق على السلعة الثانية.

منحنى السواء : يمثل التوليفات المختلفة من سلعتين لتعطي نفس الإشباع .



$X_1 = 150/2 = 75$ الدخل لو انفق على السلعة الأولى . (ب)

$X_2 = 150/5 = 15$ الدخل لو انفق على السلعة الثانية.

$X_1 = 150/3 = 50$ الدخل لو انفق على السلعة الأولى. (ج)

$X_2 = 150/10 = 15$ الدخل لو انفق على السلعة الثانية.

مثال (4):

إذا علمت أن دالة إنتاج الطماطم بمزرعة تعتمد على عنصر الأرض X_1، وعنصر الآلة X_2 وكانت الدالة الإنتاجية كما يلي :

$$Y = 2X_1X_2 + 24X_1 - X_1^2 - 2X_2^2$$

حيث Y هو الإنتاج ، فإذا علمت أن سعر شراء الأرض $PX_1 = 5$ دينار، وسعر

شراء الآلة PX_2 = 4 دينار وسعر بيع الطماطم $P_Y=2$ دينار للقنطار.

المطلوب :

(1) أوجد ربح المزارع من إنتاج الطماطم وما قيمته.

(2) إذا كان لدى المزارع 40 دينار فقط لشراء X_1X_2 أوجد ربح المزارع في هذه الحالة.

(3) وضح بالرسم إذا زاد دخل المزارع إلى 80 دينار وزاد سعر X_1 إلى 6 دينار وسعر السلعة الثانية X_2 = 5 دينار هل يزيد ربح المزارع أم لا وما قيمته؟

الحل:

(1):

$$Y = 2X1X2 + 24X_1 - X_1^2 - 2X_2^2$$

$$\pi = TR - TC$$

$$TC = P_1 X_1 + P_1 . X_2 = 5X_1 + 4X_2$$

$$TR = PY\, Y$$

$$TR = 2\,(2X_1X_2 + 24X_1 - X_1^2 - 2X_2^2)$$

$$TR = 4X_1X_2 + 48X_1 - 2X_1^2 - 4X_2^2$$

$$\pi = TR - TC$$

$$\pi = 4X_1X_2 + 48X_1 - 2X_1^2 - 4X_2^2 - (5X_1 + 4X_2)$$

$$\pi = 4X_1X_2 + 48X_1 - 2X_1^2 - 4X_2^2 - 5X_1 - 4X_2$$

$\boldsymbol{\pi} = 4X_1X_2 + 43X_1 - 2\boldsymbol{X_1^2} - 4\boldsymbol{X_2^2} - 4X_2$

$\frac{\boldsymbol{dl}}{\boldsymbol{dX_1}} = 4X_2 + 43X_1 - \cancel{4X_1} = 0 \qquad (1)$

$\frac{\boldsymbol{dl}}{\boldsymbol{dX_2}} = \cancel{4X_1} + 8X_2 - 4 = 0 \qquad (2)$

بطرح (2) من (1)

$$\mathbf{4 - X_2 + 39 = 0}$$

$$\mathbf{4 - X_2 = -39}$$

$$X_2 = \frac{\mathbf{-39}}{\mathbf{-4}}$$

$$X_1 = \mathbf{9\frac{3}{4}}$$

بالتعويض في المعادلة (1) عن قيمة $X_2 = 9.75$

$$\mathbf{4(9.75) + 43 - 4X_1 = 0}$$

$$X_1 = 20.5$$

$$\frac{\delta^2\pi}{\delta X_2^2} = -4$$

$$\frac{\delta^2\pi}{\delta X_2^2} = -8$$

$$\frac{\delta^2\pi}{\delta X_2^2} = \frac{\delta^2\pi}{\delta X_2^2} = 4$$

$$H = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\Delta H = 32 - 16 = 16$$

أي أن المزارع ينتج 20.5 من X_1 ، 9.75 من X_2 ليحقق تعظيم لربحه يبلغ التالي:

$$\pi = 4X_1X_2 + 43X_1 - 2\boldsymbol{X_1^2} - 4\boldsymbol{X_2^2} - 4X_2$$

$$\pi = 4(20.5)(9.75) + 43(20.5) - 2(21 - 4\boldsymbol{X_2^2} - 4X)$$

$$\pi = 799.5 + 881.5 - 840.5 - 380.25 - 39$$

$$\pi = 421.25$$

:(2)

$$L = \pi = 4X_1X_2 + 48X_1 - 2\boldsymbol{X_1^2} - 4\boldsymbol{X_2^2} + \lambda\,(40 - 5X_1 + 4\,X_2)$$

$$L = \pi = 4X_1X_2 + 48X_1 - 2\boldsymbol{X_1^2} - 4\boldsymbol{X_2^2} + 40\lambda - 5X_1\,\lambda - 4\,X_2\,\lambda$$

$$\frac{dL}{dX_1} = 4X_2 + 48 - 4X_1 - 5\lambda = 0$$

$$\frac{dL}{dX_2} = 4X_1 - 8X_2 - 4\lambda \quad = 0$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = 40 - 5X_1 - 4X_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 4 & -5 \\ 4 & -8 & -4 \\ -5 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48 \\ 0 \\ -40 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 4 & -5 \\ 4 & -8 & -4 \\ -5 & -4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -4 & 4 \\ 4 & -8 \\ -5 & -4 \end{matrix}$$

$$\Delta = \big(0 + 80 + 80\big) - \ (-200 + \big(-64\big) + 0)$$

$$\Delta = 160 - \ (-264)$$

$$\Delta = 424$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} +\begin{bmatrix} -8 & -3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} & +\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} & +\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} \\ +\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} & +\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -16 & 20 & -56 \\ 20 & -25 & -36 \\ -56 & -36 & 16 \end{bmatrix}$$.المصفوفة المحولة

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-16}{424} & \frac{20}{424} & \frac{-56}{424} \\ \frac{20}{424} & \frac{-25}{424} & \frac{-36}{424} \\ \frac{-56}{424} & \frac{-36}{424} & \frac{16}{424} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-16}{424} & \frac{20}{424} & \frac{-56}{424} \\ \frac{20}{424} & \frac{-25}{424} & \frac{-36}{424} \\ \frac{-56}{424} & \frac{-36}{424} & \frac{16}{424} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -48 \\ 0 \\ -40 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{376}{53} \\ \frac{60}{53} \\ \frac{256}{53} \end{bmatrix}$$

$X_1 = 7.094$ $X_2 = 1.132$ $\lambda = 4.8$

التحقيق

$$40 - 5X_1 - 4X_2 = 0$$

$$40 - 5(7.094) - 4(1.132) = 0$$

$$40 - 35.471 - 4.528 = 0$$

$$40 - 40 = 0$$

$\therefore$ الجذور صحيحة

$$H = \begin{vmatrix} -4 & 4 & -5 \\ 4 & -8 & -4 \\ -5 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta H = 424$$

$\therefore$ ΔH موجبة $\therefore$ النهاية عظمى.

$\therefore$ باستخدام المزارع لـ 7.094 من X_1 ، 1.132 من X_2 يتحقق لمزارع الطماطم

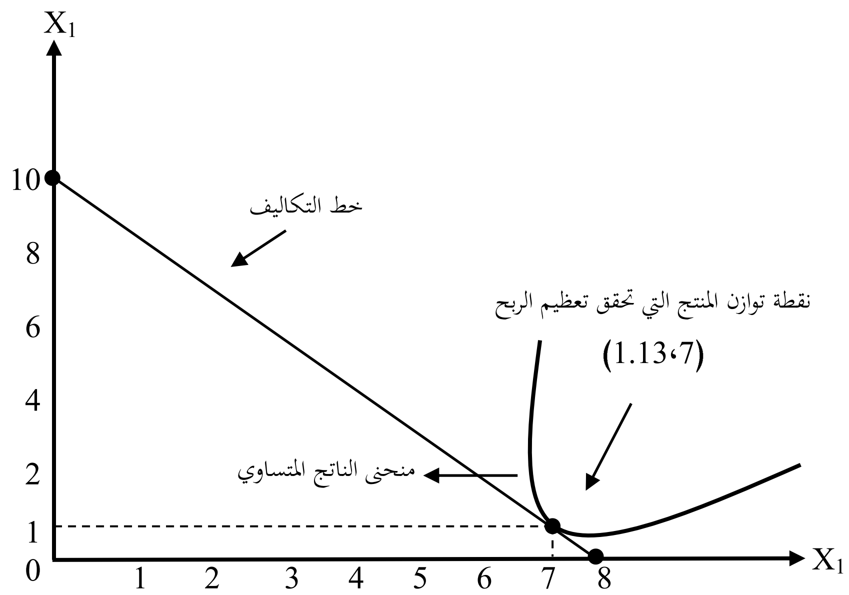
أعظم ربح ولكن في وجود القيد وهو أن دخله مساوياً لنحو 40 وحدة نقدية وسعر X_1=5، X_2 =4 .

$$\square X_1 - 4X_2 = 40$$

عند استخدام X_1 فقط وبدون استخدام X_2 يكون $X_1 = 8$.

عند استخدام X_2 فقط وبدون استخدام X_1 يكون $X_2 = 10$.

عند تمثيل ذلك بيانياً نتحصل على خط التكاليف الذي يمثل إمكانية الإنتاج في ظل قيد الدخل والنقطة التي يحصل فيها منحنى الناتج المتماثل (منحنى الناتج المتساوي) وهو التوليفات المختلفة من موردي الإنتاج لتعطي نفس الإنتاج.



(3): يترك للطالب الحل.

تمارين الفصل الرابع

(1) أوجد قيمة X_1 ، X_2 التي تؤدي إلى تعظيم أو تدنية الدالة :

$$Y = 10X_1 + 20X_2 - 2X^2_1 - X_1X_2 - 2X^2_2$$

(2) لو فرضنا أن مصنع المرج ينتج بطاطين وفرش وكانت دالة تكاليف الإنتاج :

$$TC = 2Q^2_1 + Q_1Q_2 + 2Q^2_2$$

حيث Q_1 هو عدد البطاطين Q_2 عدد الفرش وإذا كان سعر بيع البطاطين = 10 دينار وسعر بيع الفرش هو 18 دينار أوجد كمية الفرش والبطاطين المنتجة لهذا المصنع للحصول على أكبر ربح.

(3) لو تم افتراض أن مصنع الفاكهة بالجبل الأخضر ينتج بثلاثة خطوط أحدهما للعصير المركز (Q_1) وسعر بيعه (P_1) والثاني سانتوب (Q_2) وسعر بيعه (P_2) والثالث لإنتاج المربى (Q_3) وسعر بيعه (P_3)، إذا علمت أن سعر بيع كل من Q_1، Q_2، Q_3 تمثلها العلاقات التالية :

$$P_1 = 63 - 4\,Q_1$$

$$P_2 = 105 - 5\,Q_2$$

$$P_3 = 75 - 6\,Q_1$$

وإن دالة تكاليف الإنتاج في الخطوط الثلاثة هي :

حيث أن : $TC = 20 + 30\,Q$

$Q = (Q_1 + Q_2 + Q_3)$ أوجد ربح هذا المصنع وما قيمته.

(4) إذا علمت أن دالة الإشباع لمستهلك هي :

$$U = X_2, X_1$$

المطلوب :

(أ) أوجد الكمية التوازنية التي يستطيع المستهلك الحصول عليها من السلعتين X_2,X_1 وتحقق له أقصى إشباع إذا كان لدى المستهلك مبلغ 100 دينار وسعر السلعة الأولى $PX_1 = 2$ دينار، $PX_2 = 5$ دينار .

(ب) إذا زاد دخلة إلى 200 دينار هل تتغير X_2,X_1 المشتراة.

(ج) إذا زاد دخلة إلى 200 دينار وسعر $X_1 = 5$ دينار أوجد كمية X_2,X_1 التي تحقق أقصى إشباع مع التوضيح بالرسم لجميع الحالات .

(5) إذا كانت دالة الإنتاج لمصنع ما هي **:**

$$Y = 2X_1X_2 + 24X_1 - X^2_1 + 2X^2_2$$

وإذا علمت أن المصنع يعتمد على عنصري إنتاج هما الألأت X_1 والعمال X_2 وكان أجر العامل $PX_2 = 5$ وسعر شراء الآلة $PX_1 = 8$ وكان سعر بيع المنتج $PY= 5$ أوجد الكميات من X_1 ، X_2 التي يمكن من خلالها الحصول على أكبر ربح وما قيمته .

(6) مزارع ما دالة إنتاج الشعير في مزرعته تعتمد على عنصري إنتاج هما $X_1(N)$ ، $X_2(P)$ وهى على النحو التالي :

$$Q = 2X_1X_2 + 12X_1 - X^2_1 - 2X^2_2$$

وإذا كان لدى المزارع 40 وحدة نقدية فقط لشراء كل من عنصري الإنتاج وكان سعر شراء PX_1 هو 5 وحدات نقدية للطن وكان سعر شراء PX_2 وهو 4 وحدات نقدية للطن .

أوجد الكمية التوازنية من العنصرين التي يستطيع المزارع باستخدامها الحصول على أعظم إنتاج موضحاً الحل بالرسم .

(7) أوجد كمية الإنتاج التي يمكن أن تحقيقها من هذه الدالة :

$$Q = 10X + 20Y - X^2 - Y^2$$

علماً بأن Q هو الناتج ، X هو عنصر الإنتاج الأول، Y هو عنصر الإنتاج الثاني وإذا علمت أن PY = 5 ، $P_X = 2$، I = 10 حيث I هي الدخل علماً بأن شرط القيد هو:

$$2X + 5Y = 10$$

الفصل الخامس

البـرمجة الخطيـة

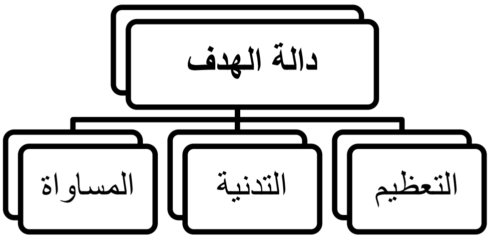
الفصل الخامس

البـرمجة الخطيـة

تعريف البرمجة الخطية : هي أحد فروع بحوث العمليات التي تستخدم في التحليل الاقتصادي بغرض التعظيم أو التدنية لهدف معين .

متطلبات البرمجة الخطية :

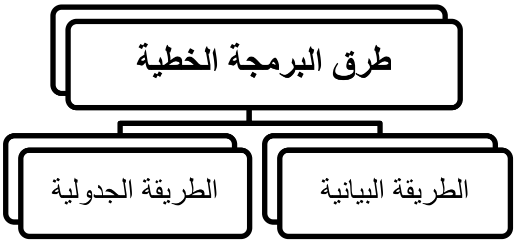
(1) دالة الهدف.



(2) القيود.

(3) عدم السالبية.

– طرق البرمجة الخطية :



أولاً : الطريقة البيانية

وهي الطريقة التي تشترط وجود متغيرين فقط وذلك لتواجد محورين في الرسم البياني هما المحور السيني والمحور الصادي.

مثال : إذا علمت أن دالة الهدف الخاصة بإنتاج أحد المصانع اللازمة لإنتاج سلعتين هما (X_1) و (X_2) كانت كالتالي:

$$Max : 2X_1 + 3X_2$$

S.T :

$2X_1 + 4X_2 \leq 12$ رأس المال

$6X_1 + 4X_2 \leq 24$ العمل

$X_1 , X_2 \geq 0$ عدم السالبية

الحل:

$$2X_1 + 4X_2 = 12 \rightarrow (1)$$

إذا كانت $X_2 = 0 \therefore 2X_1 = 12$

$$X_1 = 12/2 = 6 \rightarrow (6 , 0)$$

إذا كانت $X1 = 0 \therefore 4X2 = 12$

$$X_2 = 12/4 = 3 \rightarrow (0 , 3)$$

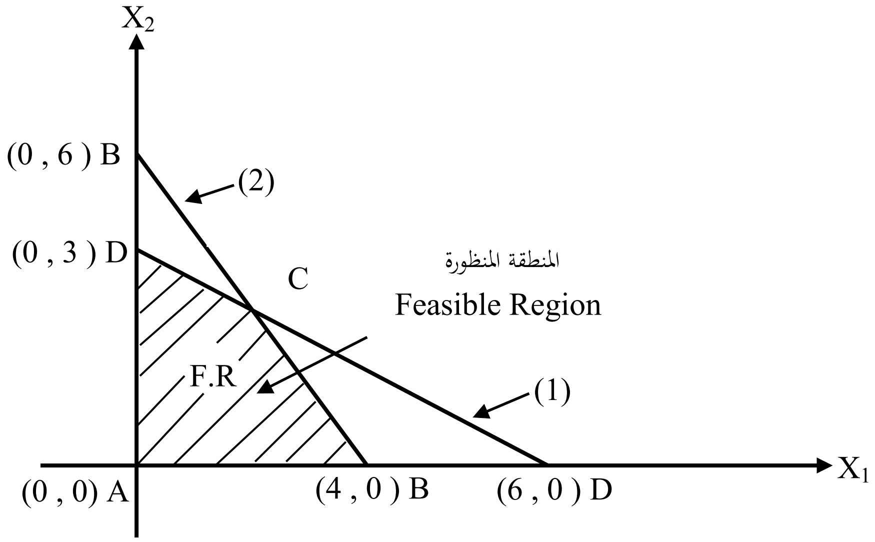
$$6X_1 + 4X_2 = 24 \rightarrow (2)$$

إذا كانت $X2 = 0 \therefore 6X_1 = 24$

$$X_1 = 24/6 = 4 \rightarrow (4 , 0)$$

إذا كانت $X_1 = 0 \therefore 4X_2 = 24$

$$X_2 = 24/4 = 6 \rightarrow (0 , 6)$$



لإيجاد نقطة (C) يتم حل المعادلتين 1 ، 2 جبريا معاً :

$$X_1 + 4\cancel{X_2}2 = 12$$

$$-6X_1 - \cancel{4}X_2 = -24$$ بضرب المعادلة رقم (2) في 1−

$$-4X_1 = -12$$

$$X_1 = -12/-4 = 3$$

بالتعويض في أحد المعادلتين عن قيمة X_1 تنتج قيمة X_2 ولتكن المعادلة (1)

$$2X_1 + 4X_2 = 12$$

$$2\ (3) + X_2 = 124$$

$$4\ X\ 2 = -\ 6 = 6\ \ 12$$

$$X_2 = 6/4 = 1.5$$

للوصول إلى النقطة المعظمة للربح يتم التعويض عن قيم النقط A , B , C , D في دالة الربح .

$$X_1 + 3X_2 = 2$$

$$(4) + 3(0) = 82$$

$$(3) + 3\ (1.5) = 13.53$$

$$(0) + 3\ (3) = 93$$

∴الحل الأمثل لتحقيق أقصى ربح 13.5 يتحقق عند النقطة (3 ، 1.5).

أي أن أقصى ربح يتحقق عندما يتم إنتاج 3 وحدات من (X_1) ، 1.5 وحدة من (X_2).

مثال:

أوجد الحل الأمثل لنموذج التعظيم للبرمجة الخطية إذا علمت أن دالة الهدف هي :

$$Max : 3X_1 + 2X_2$$

S.T :

تغليف $2X_1 + 2X_2 \leq 8$

تشطيب $3X_1 + 2X_2 \leq 12$

تعبئة $1X_1 + 0.5X_2 \leq 3$

عدم السالبية $X_1 , X_2 \geq 0$

الحل:

$$2X_1 + 2X_2 = 8 \rightarrow (1)$$

إذا كانت $X_2 = 0 \therefore 2X_1 = 8$

$$X_1 = 8/2 = 4 \rightarrow (4,0)$$

إذا كانت $X_1 = 0 \therefore 2X_2 = 8$

$$X_2 = 8/2 = 4 \rightarrow (0,4)$$

$$3X_1 + 2X_2 = 12 \rightarrow (2)$$

إذا كانت $X_2 = 0 \therefore 3X_1 = 12$

$$X_1 = 3/12 = 4 \rightarrow (4,0)$$

إذا كانت $X_1 = 0 \therefore 2X_2 = 12$

$$X_2 = 12/2 = 6 \rightarrow (0,6)$$

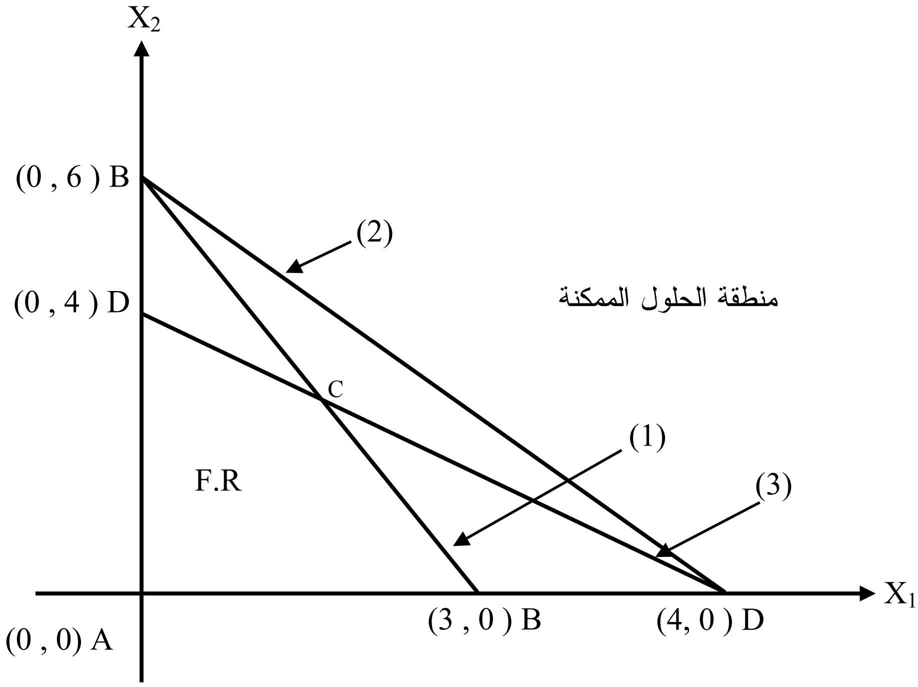
$$1X_1 + 0.5X_2 = 3 \rightarrow (3)$$

إذا كانت $X_2 = 0 \therefore 1X_1 = 3$

$$X_1 = 3/1 = 3 \rightarrow (3,0)$$

- إذا كانت $X_1 = 0 \therefore 0.5X_2 = 3$

$$X_2 = 3/0.5 = 6 \rightarrow (0,6)$$



$2X_1+2X_2 = 8 \rightarrow$ (1) معادلة رقم

$1X_1+0.5X_2= 3 \rightarrow$ (3) معادلة رقم

بضرب المعادلة رقم (3) في (2 -)

$$2X_1+2X_2 = 8$$

$$-2 X_1+0.5X_2= -6$$

$$1X_2 = 2$$

$$\therefore X_2 = \frac{2}{1} = 2$$

بالتعويض في المعادلة رقم (1) عن قيمة (X_2) :

$$2X_1 + 2(2) = 8$$

$$2X_1 = 8 - 4 = 2X_1 = 4$$

$$\therefore X_1 = \frac{4}{2} = 2$$

$$(2 ، 2)\ (X_2 ، X_1)$$

بالتعويض في دالة الهدف:

$$3X_1 + 2X_2 =$$

$$A_Z = 3(0) + 2(0) = 0$$

$$B_Z = 3(3) + 2(0) = 9$$

$$C_Z = 3(2) + 2(2) = 10$$

$$D_Z = 3(0) + 4(2) = 8$$

∴الحل الأمثل لتحقيق أقصى ربح 10 يتحقق عند النقطة (2 ، 3).

أي لتحقيق أقصى ربح يتم إنتاج 3 وحدات من (X_1) ووحدتين من (X_2).

مثال:

أوجد الحل الأمثل لنموذج التدنية للبرمجة الخطية إذا علمت أن دالة الهدف هي :

$$\text{Min} : 3X_1 + 4X_2$$

S.T :

$1X_1 + 3X_2 \geq 6$ تغليف

$1X_1 + 1X_2 \geq 4$ تشطيب

عدم السالبية $X_1 , X_2 \geq 0$

الحل:

$1X_1 + 3X_2 = 6 \rightarrow (1)$

إذا كانت $X_2 = 0 \quad \therefore \quad 1X_1 = 6$

$X_1 = 6/1 = 6 \rightarrow (6 , 0)$

إذا كانت $X_1 = 0 \quad \therefore \quad 3X_2 = 6$

$X_2 = 6/3 = 2 \rightarrow (0 , 2)$

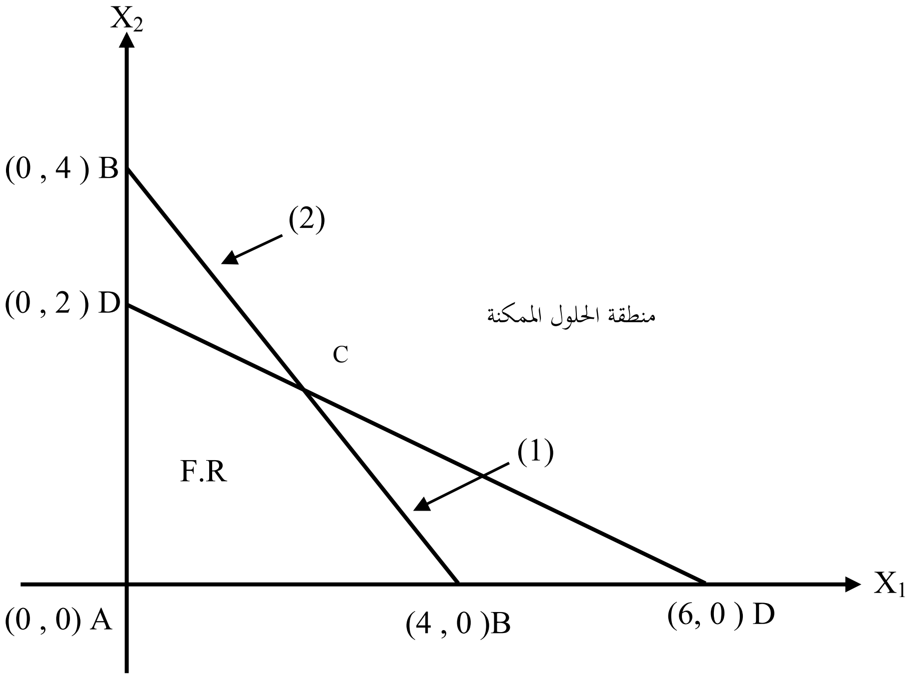
$1X_1 + 1X_2 = 4 \rightarrow (2)$

إذا كانت $X_2 = 0 \quad \therefore \quad 1X_1 = 4$

$X_1 = 4/1 = 4 \rightarrow (4 , 0)$

إذا كانت X_1 = صفر $\therefore \quad 1X_2 = 4$

$X_2 = 4/1 = 4 \rightarrow (0 , 4)$



$$1X_1+3X_2= 6$$

$$1X_1+3X_2= 4$$

بالضرب في (1-)

$$1X_1+3X_2= 6$$

$$-1X_1-1X_2= - 4$$

$$2X_2= 2$$

$$X_2=\frac{2}{2}=1$$

بالتعويض في المعادلة رقم (1)

$$X_1+3(1)= 61$$

$$1X_1= 3 \qquad \therefore X_1 = 3$$

بالتعويض في أحد المعادلتين عن قيمة X_1 تنتج قيمة X_2 ولتكن المعادلة (1)

$$1X_1 + 3X_2 =6$$

$$1 X_1+2 (1) = 6$$

$$1 X_1 = 3$$

$$\therefore X_1 = 3$$

$$Z = 3(X_1) + 4 X_2$$

$$A_Z = 0$$

$$B_Z = 3(4) + 4 (0) = 12$$

$$C_Z = 3(3) + 4 (1) = 10$$

$$D_Z = 3(0) + 4 (4) = 16$$

للوصول إلى النقطة المدنية للتكاليف ي

تم التعويض عن قيم النقط A , B , C , D في دالة التكاليف.

$$3X_1 + 4X_2 =$$

$$3(4) + 2(0) = 12$$

$$3(3) + 4(1) = 13$$

$$3(0) + 4 (4) = 16$$

∴ الحل الأمثل لتحقيق أقل تكاليف ممكنة 12 يتحقق عند النقطة (0 ، 3)

مثال:

أوجد الحل الأمثل لنموذج التعظيم للبرمجة الخطية إذا علمت أن دالة الهدف هي :

$$Max : 2X_1 + 3X_2$$

S.T :

$$1X_1 + 2X_2 \leq 6$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 155$$

$X_1 , X_2 \geq 0$ عدم السالبية

الحل:

$1X_1 + 2X_2 = 6 \quad \rightarrow \quad (1)$

إذا كانت $X_2 = 0 \quad \therefore \quad 1X_1 = 6$

$X_1 = 6/1 = 6 \quad \rightarrow \quad (6 , 0)$

إذا كانت $X_1 = 0 \quad \therefore \quad 2X_2 = 6$

$X_2 = 6/2 = 3 \quad \rightarrow \quad (0 , 3)$

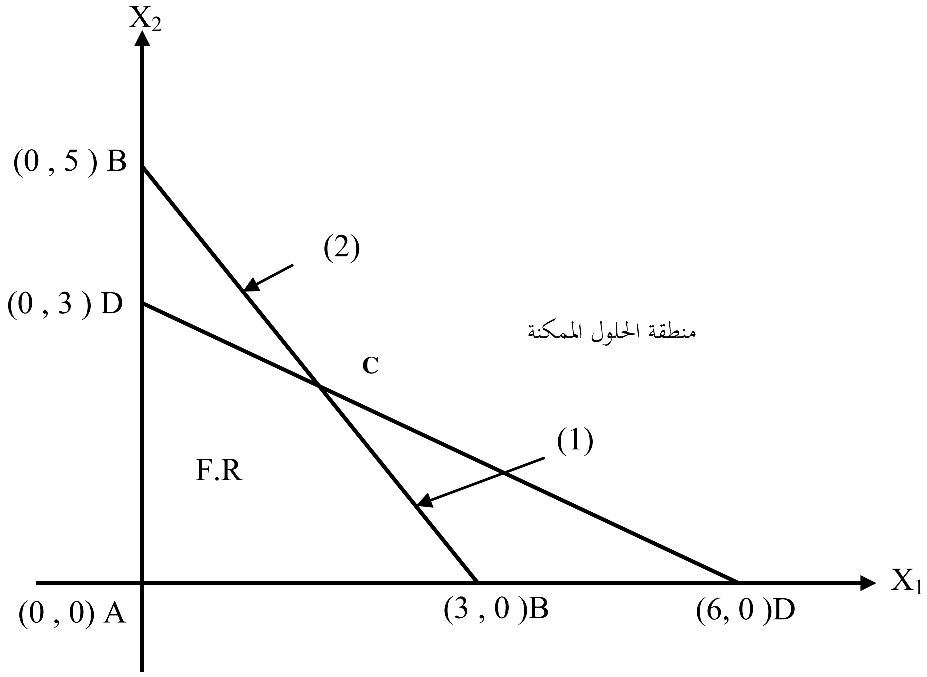
$5X_1 + 3X_2 = 15 \quad \rightarrow \quad (2)$

إذا كانت X_2 = صفر $\therefore \quad 5X_1 = 15$

$X_1 = 15/5 = 3 \quad \rightarrow \quad (3 , 0)$

إذا كانت $X_1 = 0 \quad \therefore \quad 3X_2 = 15$

$X_2 = 15/3 = 5 \quad \rightarrow \quad (0 , 5)$



لإيجاد نقطة (C) يتم حل المعادلتين 1 ، 2 جبريا معاً

$5 X_1 + 10X_2 = 30$ بالضرب في — 5

$2X3 + 1X5 =15$

$-7X_2 = -15$

$$X_2 = \frac{15}{7} = 7.1$$

بالتعويض في أحد المعادلتين عن قيمة X_2 تنتج قيمة X1 ولتكن المعادلة (1)

$$1X_1 + 2X_2 = 6$$

$$1X_1 + 2\,(2.1) = 6$$

$$1X_1 = 6 - 4.2 = 1.8$$

$$X_1 = 1.8$$

للوصول إلى النقطة المعظمة للربح يتم التعويض عن قيم النقط A , B , C , D

في دالة الربح .

دالة الربح = $X_1 + 3X_2$ 2

$$B_Z = (3) + 3\,(0) = 62$$

$$C_Z = (1.8) + 3\,(2.1) = 9.9\ \ 2$$

$$D_Z = (0) + 3\,(3) = 9\ \ 2$$

∴ الحل الأمثل لتحقيق أقصى ربح 99. يتحقق عند النقطة (3 ، 2).

مثال:

أوجد الحل الأمثل لنموذج التعظيم للبرمجة الخطية إذا علمت أن دالة الهدف هي :

$$\text{Max}\ \ 5X_1 + 8X_2$$

S.T :

$$1X_1 + 3/2X_2 \le 900$$

$$1/2X_1 + 1/3X_2 \le 300$$

$$1/8X_1 + 1/4X_2 \le 15$$

$X_1 , X_2 \ge 0$ عدم السالبية

الحل

$$1X_1 + 3/2X_2 = 900 \rightarrow (1)$$

إذا كانت $X_2 = 0$ ∴ $1X_1 = 900$

$X_1 = 900/1 = 900 \rightarrow (900, 0)$

$3/2X_2 = 900 \quad \therefore \quad 0 = X_1$ إذا كانت

$X_2 = 900/3/2 = 600 \rightarrow (0, 600)$

$1/2X_1 + 1/3X_2 = 300 \rightarrow (2)$

$1/2X_1 = 300 \quad \therefore \quad 0 = X_2$ إذا كانت

$X_1 = 300 /1/2 = 150 \rightarrow (600, 0)$

$1/3X_2 = 300 \quad \therefore \quad 0 = X_1$ إذا كانت

$X_2 = 1/3/300 = 100 \rightarrow (0, 900)$

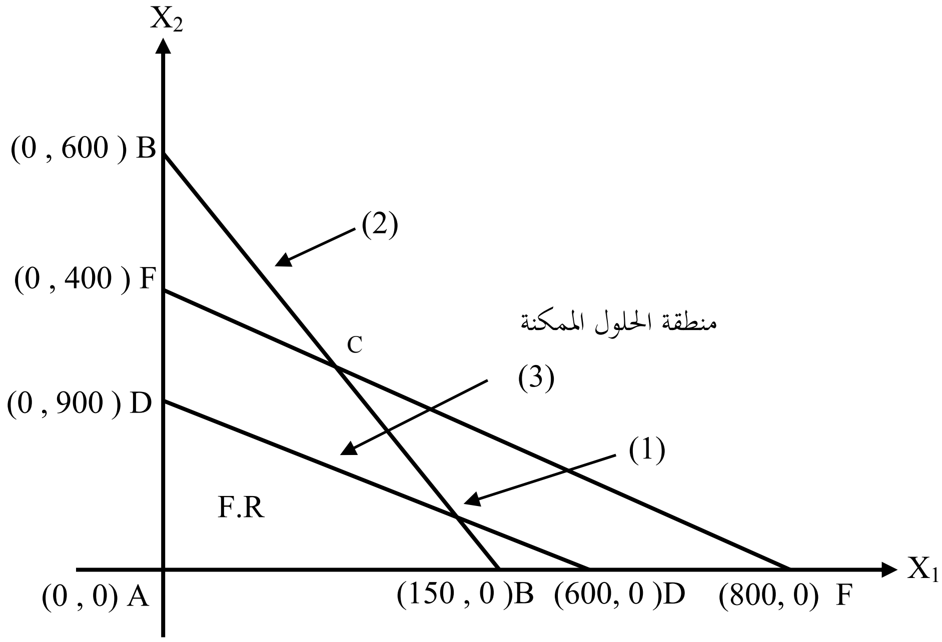
$1/8X_1 + 1/4X_2 = 100 \rightarrow (3)$

$1/8X_1 = 100 \quad \therefore \quad 0 = X_2$ إذا كانت

$X_1 = 100 /1/8 = 800 \rightarrow (800, 0)$

$1/4X_2 = 100 \quad \therefore \quad 0 = X_1$ إذا كانت

$X_2 = 1/4/100 = 400 \rightarrow (0, 400)$



لإيجاد نقطة (C) يتم حل المعادلتين 1 ، 3 جبريا معاً

$1/2\ X_1 + 1/3X_2 = 30$ بالضرب في -4

$1/8X_1 + 1/4X_2 = 15$ بالضرب في 16

$$2X_1 - 4/3X_2 = -1\cancel{2}00$$

$$2X_1 + 4X_2 2 = \cancel{1}600$$

$$-8/3\ X_2 = -400$$

$$X_2 = -400/-8/3 = 150$$

بالتعويض في أحد المعادلتين عن قيمة X_2 تنتج قيمة X_1 ولتكن المعادلة (2)

$$1/2X_1 + 1/3(150) = 300$$

$$1/2X_1 = 50 - 300 = 250$$

$$X_1 = 500$$

للوصول إلى النقطة المعظمة للربح يتم التعويض عن قيم النقط A , B , C , D

في دالة الربح .

$$5 = X_1 + 8X_2 \text{ دالة الربح}$$

$$(600) + 8(0) = 30005$$
$$(600) + 8\ (150) = 37005$$
$$(0) + 8\ (400) = 32005$$

∴ الحل الأمثل لتحقيق أقصى ربح 3700 يتحقق عند النقطة (8 ، 5)

مثال:

أوجد الحل الأمثل لنموذج التعظيم للبرمجة الخطية إذا علمت أن دالة الهدف هي :

$$\text{Max} \quad 4X_1 + 3X_2$$

S.T :

$$1X_1 + 3.5X_2 \leq 9$$
$$2X_1 + 1X_2 \leq 8$$
$$1X_1 + 1X_2 \leq 6$$

$X_1 , X_2 \geq 0$ عدم السالبية

الحل

$$1X_1 + 3.5X_2 = 9 \quad \rightarrow \quad (1)$$

إذا كانت $X_2 = 0$ ∴ $1X_1 = 9$

$X_1 = 9/1 = 9 \quad \rightarrow \quad (9, 0)$

إذا كانت $X_1 = 0$ $\therefore$ $3.5X_2 = 9$

$X_2 = 9/3.5 = 2.3 \quad \rightarrow \quad (0, 2.3)$

$2X_1 + 1X_2 = 8 \quad \rightarrow \quad (2)$

إذا كانت $X_2 = 0$ $\therefore$ $2X_1 = 8$

$X_1 = 8/2 = 4 \quad \rightarrow \quad (4, 0)$

إذا كانت $X_1 = 0$ $\therefore$ $1X_2 = 8$

$X_2 = 8/1 = 8 \quad \rightarrow \quad (0, 8)$

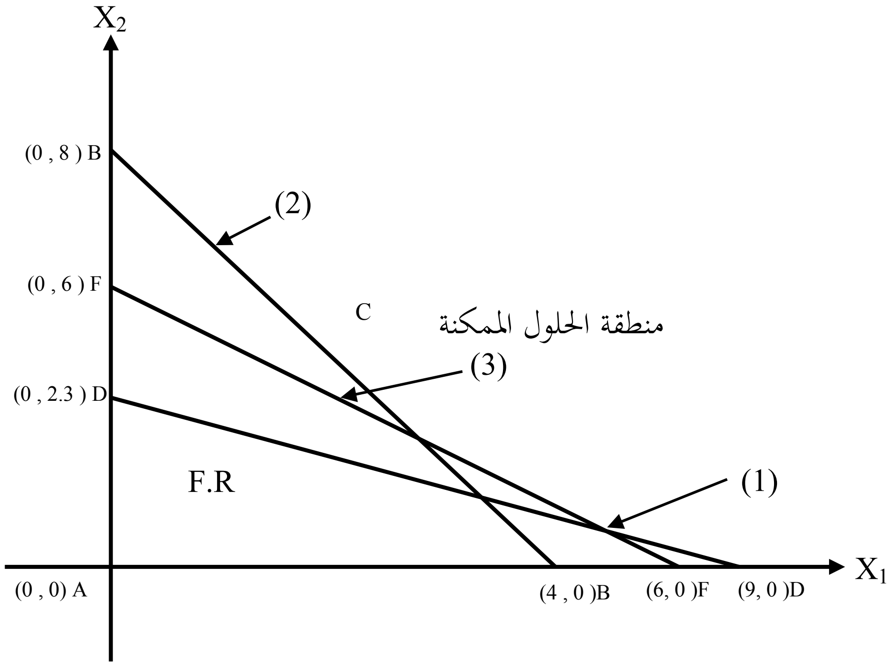
$1X_1 + 1X_2 = 6 \quad \rightarrow \quad (3)$

إذا كانت $X_2 = 0$ $\therefore$ $1X_1 = 6$

$X_1 = 6/16 = 6 \quad \rightarrow \quad (6, 0)$

إذا كانت $X_1 =$ صفر $\therefore$ $1X_2 = 6$

$X_2 = 6/1 = 6 \quad \rightarrow \quad (0, 6)$



لإيجاد نقطة (C) يتم حل المعادلتين 1 ، 2 جبرياً معاً

$1X_1 + 3.5X_2 = 9$ بالضرب في 2

$2X_1 + 1X_2 = 8$ بالضرب في −1

$$2X_1 + 7X_2 = 18$$

$$-2X_1 + X_2 = 8$$

$$6X_2 = 10$$

$$X_2 = 10/6 = 1.7$$

بالتعويض في أحد المعادلتين عن قيمة X_2 تنتج قيمة X_1 ولتكن المعادلة (1)

$$1X_1 + (3.5)(1.7) = 9$$

$$X_11 = 9 - 5.95 = 3.1$$

$$X_1 = 3.1$$

للوصول إلى النقطة المعظمة للربح يتم التعويض عن قيم النقط A , B , C , D في دالة الربح .

$$X_1 + 3X_2 = 4$$

$$(3.1) + 3(1.7) = 17.54$$

∴ الحل الأمثل لتحقيق أقصى ربح 17.5 يتحقق عند النقطة (1.7 ،3.1).

ثانيا : الطريقة الجبرية (السمبلكس):

وهذه الطريقة تتم إذا كان يوجد أكثر من متغيرين في القيود الأمر الذي يتطلب أستخدم الطريقة الجبرية وهى من أكثر الطرق التي تتسم بالدقة في الحل النهائي وذلك من خلال عدة خطوات سوف يتم تناولها في النقاط التالية :

1. تحويل المتباينات إلى متساويات وذلك بإضافة أنشطة وهمية (Slakvariables) (S) للحصول على الحل الأمثل.
2. التأكد قبل التحويل من أن علامة المتباينة في ظل مسائل التعظيم هي ≤ لأنها إذا كانت غير ذلك فأنها تحتاج إلى معالجة معينة .
3. تكوين جدول السمبلكس ويسمى Table ferom .

ولتوضيح هذه الخطوات سوف يتم طرح مثال تطبيقي لهذه الخطوات :

مثال :

إذا توافرت لديك البيانات التالية عن مزرعة مكونة من 100 هكتار ويوجد بها 80 عامل ويمتلك صاحبها رأس مال قدره 30 ألف دينار ويريد أن يزرع ثلاث محاصيل هم القطن والأرز والذرة بحيث أن يستخدم عدد واحد هكتار من الأرض وعدد 2 عمال و2000 دينار علماً بأن سعر القطن 30 دينار للطن ، وأن يستخدم عدد واحد هكتار من الأرض وعدد 3 عمال و4000 دينار علماً بأن سعر الأرز 40 دينار للطن، وأن يستخدم عدد واحد هكتار من الأرض وعدد 1 عمال و2000 دينار علماً بأن سعر الذرة 20 دينار للطن . فما هو الحل الأمثل الذي يحقق أقصى ربح لصاحب المزرعة ؟

يمكن تحويل هذا المثال اللفظي من خلال مكونات وعناصر البرمجة من دالة الهدف والقيود وعدم السالبية كما في الخطوات التالية :

الحل:

$$Max : 30X_1 + 40X_2 + 20X_3$$

S.T :

$$1X_1 + 1X_2 + 1X_3 \leq 100 \quad \text{الأرض}$$

$$2X_1 + 3X_2 + 1X_3 \leq 80 \quad \text{العمال}$$

$$4X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 30 \quad \text{رأس المال}$$

$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0 \quad \text{عدم السالبية}$$

1. تحويل المتباينات إلى متساويات وذلك بإضافة أنشطة وهمية (Slakvariables) (S) للحصول على الحل الأمثل.

$$Max : 30X_1 + 40X_2 + 20X_3 + 0\,S_1 + 0\,S_2 + 0\,S_3$$

S.T :

2.التأكد قبل التحويل من أن علامة المتباينة في ظل مسائل التعظيم هي ≤ لأنها إذا كانت غير ذلك فأنها تحتاج إلى معالجة معينة .

الأرض $1X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 0\ S_1 + 0 + 0 = 100$

العمال $2X_1 + 3X_2 + 1X_3 + 0 + 0\ S_2 + 0 = 80$

رأس المال $4X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 0 + 0 + 0\ S_3 = 30$

عدم السالبية $X_1 , X_2 , X_3 , S_1 , S_2 , S_3 \geq 0$

3. تكوين جدول السمبلكس ويسمى Table ferom .

C	R	S.A	الأنشطة الحقيقية			الأنشطة الوهمية			Max
الأسعار	الموارد	العرض النشط	$30X_1$	$X_2 40$ اكبر رقم	$X_3 20$	0 S_1	0 S_2	0 S_3	عناصر الإنتاج
0	S_1	100	1	1	1	1	0	0	100
0	S_2	80	2	3	1	0	1	0	26.7
0	S_3	30	4	2 الارتكاز	2	0	0	1	15
	Z	0	0	0	0	0	0	0	0
	C - Z		30	40	20	0	0	0	0
البرنامج الأول									
0	S_1	85	- 1	0	0	1	0	- 1/2	
0	S_2	35	- 4	0	- 2	0	1	- 3/2	
40	X_2	15	2	1	1	0	0	/21	
	Z	600	80	40	40	0	0	20	
	C - Z	600	- 50	0	- 20	0	0	- 20	
			تكلفة الفرصة البديلة			سعر الظل			
نهاية البرنامج									

The Optimal Solution is : **الحل الأمثل**

$X_1 = 0$	$S_1 = 85$
$X_2 = 15$	$S_2 = 35$
$S3 = 0$	$X3 = 0$

كيفية الحصول على أرقام البرنامج الثاني بطريقة السمبلكس

1	1
2	2

$1-1X\ 2/\ 2 = 0$

100	1
30	2

$100 - 1X\ 30/\ 2 = 85$

80	3
30	2

$80 - 1X\ 30/\ 2 = 35$

ملحوظة على الحل النهائي :

$Z = 600\ ,\ S_1 = 85\ ,\ S_2 = 35\ ,\ X_2 = 15$

هذا يعني إنه لتعظيم الربح يلزم إنتاج 15 فدان من الأرز وأن هناك فائض في عنصر الأرض قدرة 85 فدان، وفائض في عنصر العمل قدرة 35 عامل ، في حين أن رأس المال تم

استغلاله بالكامل بدليل عدم ظهور S_3 وهو يعني إنه عنصر نادر في حين أن S_1 , S_2 تعتبر عناصر غير نادرة .

∴ الأربحية = عدد الأفدنة المزروعة بالأرز X ربح الفدان = 15 X 40 = 600 جنية

وبناء علية فأن التوليفة المثلى من عناصر الإنتاج التي تحقق أقصى ربح هي:

الأرض = 15 (100 – 85) فائض.

العمل = 45 (80 – 35) فائض .

رأس المال = 30 (30 – 30) لا يوجد فائض عنصر نادر .

ملحوظة على جدول السمبلكس :

1. في السطر الخامس من البرنامج الثاني فإنه يحتوى على الإشارة السالبة فهذا يعنى إنه البرنامج الأمثل وهذا يعنى أن جدول السمبلكس انتهى .

2. أما إذا كانت الإشارة موجبة فهذا يعنى أن البرنامج لم ينتهي ونبدأ في البرنامج الثالث والرابع حتى يتم الوصول إلى الإشارة السالبة .

3. في البرنامج النهائي في السطر الأخير في بند عناصر الإنتاج اسم الأسعار الظلية ويعكس هذا السعر الظلي ثمن استخدام هذا العنصر الإنتاجي وفى صف Z فهذا يمثل تكلفة الفرصة البديلة بالنسبة للأنشطة الحقيقية .

مثال :

مصنع لتعليب الفاكهة ينقسم إلى 3 وحدات إنتاجية الأولى لتصنيع العبوات والثانية لتجهيز الفاكهة والثالثة لتعبئة الفاكهة المصنعة ، وبأ فتراض أن هذا المصنع يستخدم نوعين من الفاكهة هما المانجو والبرتقال فإذا كان سعر علبة المانجو يحقق صافى دخل 2 درهم وعلبة البرتقال تحقق صافى دخل 3 درهم ، وإذ أكان مقدار المانجو المتاح يحقق تعليب 20 ألف علبة، ومقدار المتاح من البرتقال يحقق تعليب 25 ألف علبة ، وأن وحدة تعبئة الفاكهة في المصنع تستطيع تعبئة 30 ألف علبة فقط كل أسبوع، أما وحدة تجهيز الفاكهة تعمل 40 ساعة أسبوعيا فقط علما بأن علبة المانجو تستغرق 0.002 ساعة ، وعلبة البرتقال تستغرق 0.001 ساعة في التجهيز .

المطلوب : وضع الخطة المثلى التي تعمل على تعظيم صافى دخل هذا المصنع في ظل الموارد المتاحة وذلك باستخدام أسلوب البرمجة الخطية .

الحل:

$$\text{Max} : 2X_1 + 3X_2$$

S.T :

$$1X_1 \leq 20$$

$$1X_2 \leq 25$$

$$0.002X_1 + 0.001X_2 \leq 40$$

$X_1 , X_2 \geq 0$ عدم السالبية

1. تحويل المتباينات إلى متساويات وذلك بإضافة أنشطة وهمية (Slakvariables) (S) للحصول على الحل الأمثل .

$$\text{Max} : 2X_1 + 3X_2 + 0\ S_1 + 0\ S_2$$

S.T :

2. التأكد قبل التحويل من أن علامة المتباينة في ظل مسائل التعظيم هي ≥ لأنها إذا كانت غير ذلك فأنها تحتاج إلى معالجة معينة.

$$1X_1 + 1S_1 + 0 = 20$$
$$1X_2 + 0 + 1\,S_2 = 25$$

عدم السالبية $X_1 , X_2 , X_3 , S_1 , S_2 \geq 0$

3. تكوين جدول السمبلكس ويسمى Table ferom .

C	R	S.A	الأنشطة الحقيقية		الأنشطة الوهمية		Max
الأسعار	الموارد	العرض النشط	$X_1$2	$X_2$3 أكبر رقم	0 S_1	0 S_2	عناصر الإنتاج
0	S_1	20	1	0	1	0	∞
0	S_2	25	0	1	0	1	25
	Z	40	0	0	0	0	40
	C - Z	40	2	3	0	0	0
البرنامج الأول							
0	S_1	20	1	0	1	0	20
3	X_2	25	0	1	0	1	∞
0	15	15	0.002	0	0	0.001	75
	Z	75	0	0	0	3	0
	C - Z	75	2	0	0	3	0
البرنامج الثاني							
0	S_1	12500	0	0	500	0.5	
3	X_2	2500	0	1	0	1	
2	X_1	7500	1	0	500	0.005	
	Z	90000	2	3	0	2.99 -	
	C - Z	90000	0	0	0	2.99 -	
نهاية البرنامج							

الحل الأمثل : The Optimal Solution is

$X_1 = 2$ $\qquad$ $S_1 = 12500$

$X2 = 3$ $\qquad$ $S2 = 0$

مثال :

$$\text{Max}: 30X_1 + 10X_2 + 40X_3 + 12X_4$$

S.T :

$$1X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 1X_4 \leq 100$$

$$0X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 0.5X_4 \leq 100$$

$$1X_1 + 0X_2 + 2X_3 + 0X_4 \leq 80$$

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$ عدم السالبية

1. تحويل المتباينات إلى متساويات وذلك بإضافة أنشطة وهمية (Slakvariables) (S) للحصول على الحل الأمثل .

$$\text{Max}: 30X_1 + 10X_2 + 40X_3 + 12X_4 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4$$

S.T :

2. التأكد قبل التحويل من أن علامة المتباينة في ظل مسائل التعظيم هي ≥ لأنها إذا كانت غير ذلك فأنها تحتاج إلى معالجة معينة .

$$1X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 1X_4 + 1S_1 + 0 + 0 = 100$$

$$0X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 0.5X_4 + 0 + 1S_2 + 0 = 100$$

$$1X_1 + 0X_2 + 2X_3 + 0X_4 + 0 + 0 + 1S_3 =$$

$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$ $\qquad$ عدم السالبية

3.تكوين جدول السمبلكس ويسمى Table ferom .

C	R	S.A	الأنشطة الحقيقية				الأنشطة الوهمية			Max
الأسعار	الموارد	العرض النشط	30 X_1	10 X_2	40 X_3	12 X_4	0 S_1	0 S_2	0 S_3	عناصر الإنتاج
0	S_1	100	1	1	1	1	1	0	0	100
0	S_2	100	0	1	0	0.5	0	1	0	∞
0	S_3	80	1	0	2	0	0	0	1	40
	Z	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	C - Z	0	30	10	40–	12	0	0	0	0
البرنامج الأول										
0	S_1	60	0.5	1	0	1	1	0	0.5	60
0	S_2	100	0	1	0	0.5	0	1	0	200
40	X_4	40	0.5	0	1	0	0	0	0.5	∞
	Z	1600	20	0	40	0	0	0	20	0
	C - Z	1600	10	10	0	12	0	0	20	0
البرنامج الثاني										
12	X_1	60	0.5	1	0	1	1	0	0.5	120
0	S_2	70	0.25	0.5	0	0	0.5	1	0.25	280
40	X_4	40	0.5	0	1	0	0	0	0.5	80
	Z	2320	26	12	40	12	12	0	14	0
	C - Z	2320	4	2	0	0	12	0	14	0
البرنامج الثالث										
12	X_1	20	0	1	1	1	1	0	1	
0	S_2	90	0	0.5	0.5	0	0.5	1	0.5	
20	X_2	80	1	0	2	0	0	0	1	
	Z	2640	30	12	48	12	12	0	18	
	C - Z	2640	0	8 –	8 –	0	– 12	0	– 18	
البرنامج النهائي										

The Optimal Solution is : **الحل الأمثل**

$X1 = 20$ $S1 = 0$

$X2 = 80$ $S2 = 90$

$S3 = 0$

تمارين على الفصل الخامس

حل المسائل التالية بطريقة السمبلكس :

(1)

$$\text{Max} : 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

S.T :

$$X_1 + X_2 \leq 103$$
$$X_2 + 2X_3 \leq 6$$
$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 82$$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$ عدم السالبية

(2)

$$\text{Max} : 12X_1 + 5X_2$$

S.T :

$$X_1 + 2X_2 \leq 8$$
$$X_1 \leq 4$$
$$X_2 \leq 3$$

$X_1 , X_2 \geq 0$ عدم السالبية

(3)

$$\text{Max} : 12X_1 + 8X_2$$

S.T :

$$X_1 + 9X_2 \leq 18004$$
$$X_1 + 6X_2 \leq 220008$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 400$$

$X_1 , X_2 \geq 0$ عدم السالبية

(4)

$$\text{Min} : 30X_1 + 50X_2$$

S.T :

$$X1 + 2X2 \leq 306$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 243$$
$$5X_1 + 10 X_2 \leq 60$$
$X_1 , X_2 \geq 0$ عدم السالبية

(5)

$$\text{Max} : 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

S.T :

$$X_1 + X_2 \leq 103$$
$$X_2 + 2X_3 \leq 6$$
$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 82$$
$X_1 , X_{2\,,}\ X_3 \geq 0$ عدم السالبية

(6)

$$\text{Max} : 30X_1 + 24X_2 + 60X_3$$

S.T :

$$X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq 306$$
$$X_1 + 2X_2 + 10X_3 \leq 502$$
$X_1 , X_{2\,,}\ X_3 \geq 0$ عدم السالبية

(7)

$$\text{Max} : 5X_1 + 3X_2$$

S.T :

$$X_1 + 2X_2 \leq 106$$
$$5X_1 + 5X_2 \leq 40$$
$$2X_1 + 4X_2 \leq 28$$
$X_1 , X_{2\,,} \geq 0$ عدم السالبية

المصطلحات العلمية

بعض المصطلحات العلمية الاقتصادية والرياضية

Investment	استثمار
Colums	أعمدة
Mathematical Economic	اقتصاد رياضي
Marginal Revenue	الإيراد الحدي
Marginal Analysis	التحليل الحدي
Dynamic Analysis	التحليل الحركي
Minimization	التدنية
Maximization	التعظيم
Marginal Cost	التكلفة الحدية
Function Particular	الدالة الخاصة
Function Complementary	الدالة المتممة
Function Inverse	الدالة المعكوسة
Integrand Function	الدالة المكملة
Necessary Condition	الشرط الضروري
Sufficient Condition	الشرط الكافي
Total Demand	الطلب الإجمالي
Individual Demand	الطلب الفردي
Competitive Demand	الطلب المتنافي
Composite Demand	الطلب المركب
Joint Demand	الطلب المشترك

Demand Intermediate	الطلب الوسيط
Ineffective Demand	الطلب غير الفعال
Present Value	القيمة الحالية
Constraints	القيود
The Quantity Demanded	الكمية المطلوبة
The Quantity Supplied	الكمية المعروضة
Exogenous Variables	المتغيرات الخارجية
Endogenous Variables	المتغيرات الداخلية
Cross Partial Derivatives	المشتقات الجزئية المتقاطعة
Matrices and Linear Models	المصفوفات والنماذج الخطية
Cofactor Matrix	المصفوفة المرافقة
Multiplier	المضاعف
Behavioural Equations	المعادلات السلوكية
Common Denominator	المقام المشترك
Marginal Propensity to Consume	الميل الحدي للاستهلاك
Continus Dynamic Model	النماذج الديناميكية المستمرة
Model Economic	النموذج الاقتصادي
Dynamic Model	النموذج الحركي
Model Econometric	النموذج القياسي
Dual Model	النموذج المقابل
Post - Chang	بعد التغير
Data	بيانات
Summation	تجميع

Profit Maximization	تعظيم الربح
Differential	تفاضل
Integration	تكامل
Tangency	تماس
Decreasing Relurns to Scale	تناقص غلة الحجم
Constant Relurns to Scale	ثبات غلة الحجم
Matrix Algebra	جبر المصفوفات
Root	جذر
Addition of Matrices	جمع المصفوفات
Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Solution	حل
costs Lines – Iso	خطوط التكاليف متساوية الميل
Profit Lines – Iso	خطوط الربح متساوي الميل
Exponential Function	دالة آسية
Hyperbola Function	دالة القطع الزائد
Function Rectangular- hyperbolic	دالة القطع المكافئ
Function Objective	دالة الهدف
Quadratic Function	دالة تربيعية
Function Linear	دالة خطية
Explicit Function	دالة صريحة
Implicit Function	دالة ضمنية
Linear Function–Non	دالة غير خطية
Function Logarithmic	دالة لوغاريتمية

Homogeneous Function	دالة متجانسة
Increasing Function	دالة متزايدة
Composite Function	دالة مركبة
Continuous Function	دالة مستمرة
Cubic and higher Power Function	دالة من الدرجة الثالثة فأكثر
Degree of an Equation	درجة المعادلة
Capital	رأس المال
Order	رتبة
Net Profit	صافى الربح
Rows	صفوف
Method Iterative	طريقة التكرار
Simplex Method	طريقة السمبلكس
Minor Method	طريقة المحيدد
Minor Method	طريقة المحيدد
Interest	فائدة
Rule of Sum and Differences	قاعدة الجمع والطرح
Function Rule Constant	قاعدة الدالة الثابتة
Chang Pre -	قبل التغير
Sector	قطاع
Diagonal of a Determinant	قطر المحدد
Rules Differentiation	قواعد التفاضل
Value	قيمة
Vector	متجه

Dependent Variables	متغير تابع
Variables Independent	متغير مستقل
Set	مجموعة
Unknown	مجهول
Convex	محدب
Determinant	محدد
Transactions Matrix	مصفوفة التحويلات
Coefficients Matrix	مصفوفة المعاملات
Unit Matrix	مصفوفة الوحدة
Matrix Singular	مصفوفة شاذة
Matrix Zero	مصفوفة صفرية
Upper Triangular Matrix	مصفوفة مثلية عليا
Adjoint Matrix	مصفوفة محاذية (مبدلة مصفوفة المرافقات)
Matrix Square	مصفوفة مربعة
Difference Equation	معادلات الفروق
Differential Equation	معادلة تفاضلية
Difference Quotient Equation	معادلة قسمة الفرق
Parameters	معلمات
Concave	مقعر
Tangent	مماس
Perfect Competition	منافسة كاملة
Isoquant Curve	منحنى الناتج المتساوي
Feasible Solution Region	منطقة الحلول الممكنة

Game Theory	نظرية الألعاب
Turnig Point	نقطة الانقلاب
Input models – Output	نماذج المستخدم – المنتج
Cobweb Model	نموذج نسيج العنكبوت
Explosive Cobweb Model	نموذج نسيج العنكبوت المتباعد
Damped Oscillating -Non Cobweb Model	نموذج نسيج العنكبوت المتذبذب غير المتقارب
Damped Cobweb Model	نموذج نسيج العنكبوت المتقارب

المراجع

أولاً: المراجع العربية

1. إبراهيم رياض غبريال – **مبادئ الرياضيات الاقتصادية** – مطبوعات الجامعة المفتوحة– طرابلس – الجماهيرية العربية الليبية – 1995.

2. ألفا تشيا نج – **الطرق الأساسية في الاقتصاد الرياضي** – ترجمة دكتور نعمة الله نجيب إبراهيم – دار المريخ – الرياض – السعودية – 1995.

3. أيثل عبد الجبار الجومرد– **مقدمة في الرياضيات الاقتصادية** – وزارة التعليم العالي والبحث العلمي – جامعة الموصل – العراق – 1988.

4. جعفر باقر علوش– **الاقتصاد الرياضي** – المكتبة الجامعية – غريان – الجماهيرية الليبية – 2004.

5. جيمس. م. هندرسون، ريتشارد. أ. كواندت – ترجمة متوكل عباس مهلهل– **نظرية اقتصاديات الوحدة (أسلوب رياضي)** – دار ماكجرد وهيكل للنشر – 1980.

6. عامر المقري– مراد زكي– **أساسيات الاقتصاد الرياضي** – دار المطبوعات والنشر – جامعة الفاتح – طرابلس– الجماهيرية الليبية – 1998.

7. عبد العزيز فهمي هيكل– **الرياضيات والإدارة الاقتصادية** – دار النهضة العربية – بيروت – لبنان – 2000.

8. عبد المرضي حامد عزام، مصطفى عبد المنعم الخواجة – **الرياضيات للتجاريين**– الناشر قسم الرياضة والإحصاء والتأمين – 2001.

9. عدنان كريم نجم الدين وآخرون – **الاقتصاد الرياضي** – بيت الحكمة – جامعة بغداد – العراق – 1989.

10. عدنان كريم نجم الدين – **الاقتصاد الرياضي (مدخل كمي تحليلي)** – دار وائل للنشر– الطبعة الثانية – عمان– الأردن – 2003.

11. فتحي صالح بو سدره ، زينب إسماعيل المصري – **الأسلوب الرياضي في الاقتصاد** – دار الكتب الوطنية – بنغازي – الجماهيرية الليبية – 1988.

12. فتحي صالح بوسدره – **مقدمة في الاقتصاد الرياضي** – الدار الجماهيرية للنشر والتوزيع والإعلان – طرابلس – الجماهيرية الليبية– 1995.

13. محمد فتحي محمد علي، فريد الحسين عبد اللطيف – **مقدمة في الاقتصاد الرياضي** – مكتبة عين شمس – القاهرة – ج.م.ع – 1970.

14. مختار محمد متولي– **الأساليب الرياضية للاقتصاديين** – جامعة الملك سعود –الرياض – المملكة العربية السعودية – 1996.

15. هرفيه تربيز – **مدخل إلى الحساب الاقتصادي** – ترجمة دكتور محمد الحجار– المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع – بيروت – لبنان – الطبعة الأولى – 1990.

16. هناء خير الدين– **الاقتصاد الرياضي**– دار الجامعات المصرية– الإسكندرية – ج.م.ع – 1979.

17. وليد إسماعيل السيفو– **المدخل إلى الاقتصاد القياسي** – دار الكتب للطباعة والنشر – جامعة الموصل – 1988 .

ثانياً: المراجع الأجنبية

1. Allen. R. G. A. “**Mathematical Analysis for Economists**”, Macmillan, London, 1972.

2. Class. J. Colin **“An Introduction to Mathematical Methods in Economics”,** Mcgraw-Hill inc, 1980.

3. Eugene Silberber “**The Structure of Economics – A Mathematical Analysis”,** MacGraw-Hill Tokyo, 1981.

4. Gregory. C. Chow **“Analysis and Control of Dynamic Economic systems”**, John Wily & sons, New York, 1975.

5. Harry H. Kelejian & Wallace E. Oates "**Introduction to Econometrics, Principles & Aplicaions"** 2nd Edition, Harper & Row Publishers, New York, 1981.
6. Ian Jacques **"Mathematics for Economics and Business"** 2nd Edition, Wesley, England, 1995.
7. Lucking, Richard C. **"Mathematics for Management",** John Willey and Sons, New York, 1980.
8. Michael Parkin **"Economic",** Addison Wesley, 2nd Edition, New York, 1994.
9. Paul A. Samuelson **"Economic",** MacGrraw-Hill, 11 Edition, 1980.
10. Paul A. Samuelson **"Interactions between the Multiplier Analysis and the Principles of Acceleration"**, Review of Economic, 1993.

منشورات جامعة عمر المختار
البيضاء - ليبيا
2022