

معادلات مبسطة لتمثيل الجريان غير المنتظم في القنوات المكشوفة باستعمال الطرق العددية

شاكر عبد اللطيف جليل

أستاذ مساعد جامعة عمر المختار

الملخص

يعالج البحث الجريان غير المنتظم في القنوات المكشوفة باستعمال طريقة Runge-Kutta العددية في حل المعادلة التفاضلية الأساسية للجريان. ثم يستنتج البحث معادلات مبسطة عديمة الوحدات من نتائج حل المعادلة التفاضلية باستعمال الحاسوب حيث تساعد هذه المعادلات على تصميم ودراسة الجريانات في القنوات ذات المقطع المنتظم دون العودة إلى تكامل المعادلة التفاضلية العامة.

المقدمة

يعود حدوث التعديلات المختلفة على الجريان المنتظم داخل القنوات المكشوفة والتي تسبب في عدم انتظامه إلى العمليات التكنولوجية أو الطبيعية التي من الممكن أن تكون موجودة في مناطق مختلفة على طول القناة حيث ينعكس أثرها على طبيعة الجريان. إن طبيعة الجريان المتأثر بتلك العوامل هي الجريان غير المنتظم، وقد حاول الكثير من الباحثين التعرف على هذه الطبيعة من خلال تحديد شكل السطح الحر للجريان على امتداد طول القناة وقد وضع الكثير من الحلول لهذا الجريان معظمها اعتمد على التكامل المباشر أو التكامل البياني أو التكامل بالخطوات لحل المعادلة العامة للجريان، حيث ذكرت هذه الطرق في المرجعين (Henderson, 1966; Chow, 1959)

منذ أن استطاع الباحث (1928) Belonger تفسير السطح الحر للجريان في القنوات المكشوفة ومحاولته استعمال الطرق العددية لحل المعادلة العامة للجريان، اتسعت هذه الفكرة من بعده حيث اتبعها الكثير من الباحثين الذين توصلوا إلى شكل السطح الحر للجريان ومنهم (1969) Aplet و (1970) Prosad و (1980) Kordas، وقد تم استعراض هذه الطرق العددية وغيرها في منشورات جامعة قاريونس (جليل، 1992) أما في دراستنا هذه فسوف نتناول اتباع الطرق العددية للتوصل إلى معادلات مبسطة تساعد المهندس على التعرف والحصول على شكل السطح الحر للسائل في القنوات المكشوفة ذات المقاطع المنتظمة عندما يحدث فيها جريان غير منتظم، معتمدين في ذلك على الطرق العددية في حل المعادلة العامة للجريان بطريقة الخطوات المتتالية.

مدخل نظري

إن القنوات ذات المقاطع المنتظمة شائعة الاستعمال في مشاريع الري والقنوات الاصطناعية وهي تعتبر أبسط في التحليل من القنوات غير المنتظمة لسببين أساسيين هما: ثبوت مقطعها العرضي بالنسبة لطولها $(\partial A/\partial x \approx 0)$ وأن عامل توزيع السرعة $(\alpha 5)$ في مقطع الجريان يمكن اعتباره ثابتاً. واستناداً إلى الفرضيات الأساسية التي جاءت في المرجع (1959) Chow. عرفت المعادلة العامة للجريان بالصيغة التالية: -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 + \alpha \frac{d}{dy} \left(\frac{V^2}{2g} \right)} \quad \dots \dots \dots (1)$$

حيث أن dy/dx هو التغير في عمق الجريان بالنسبة للمسافة وهو ميل المماس لسطح السائل في نقطة معينة منه. والمقداران S_o, S_f هما ميل قعر القناة وميل خط الطاقة على التوالي، أما المقدار $\alpha d \left(\frac{y^2}{2g} \right) dy$ فهو يمثل التغير في حمولة السرعة (الطاقة الحركية). وبما أن السرعة V عبارة عن التصريف Q مقسوماً على مساحة مقطع

الجريان A، وأن التصريف كمية ثابتة بذلك يكون عرض القناة عند سطح السائل هو $T=dA/dy$ ومن هذه الكميات يمكن كتابة الحد الأخير من المعادلة العامة رقم (1) بالشكل التالي: -

$$\alpha \frac{d}{dy} \left(\frac{V^2}{2g} \right) = \alpha \frac{Q^2}{2g} \frac{dA^{-2}}{dy} = -\alpha \frac{Q^2 T}{g A^3}$$

وبالتعويض في المعادلة رقم (1) نحصل على: -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - \alpha \frac{Q^2}{g A^3} \cdot T} \dots\dots\dots (2)$$

وبالعودة إلى الفرضيات الأساسية المتعارف عليها، واستخدام معادلة ماننغ للجريان المنتظم للتعويض عن قيمة S_f فإن: -

$$S_f = \frac{n^2 V^2}{R^{4/3}} = \frac{n^2 Q^2}{A^2 R^{4/3}}$$

وبالتعويض في المعادلة رقم (2) نحصل على: -

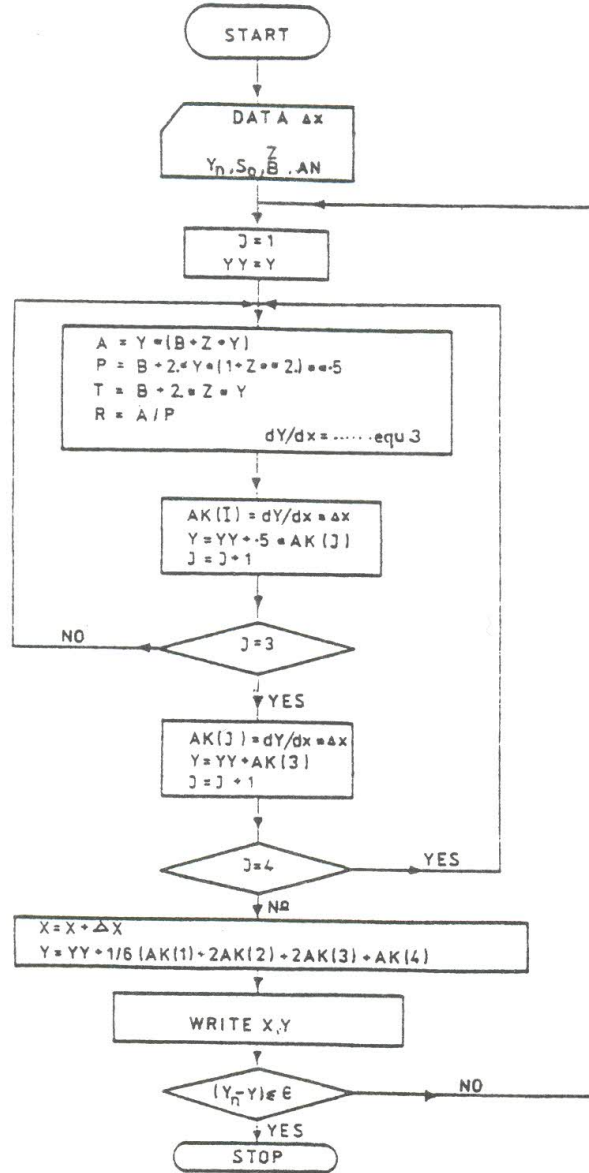
$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - \frac{n^2 Q^2}{A^2 R^{4/3}}}{1 - \alpha \frac{Q^2 T}{g A^3}} \dots\dots\dots (3)$$

يمكن تمثيل المتغيرات الداخلة في ظاهرة الجريان غير المنتظم والممثلة في المعادلة رقم (3) بالصيغة التالية: -

$$\frac{dy}{dx} = (S_o, n, T, \alpha, \text{أبعاد القناة}, y) \dots\dots\dots (4)$$

يلاحظ من الصيغة أعلاه بأن المعادلة هي معادلة تفاضلية غير خطية صيغتها

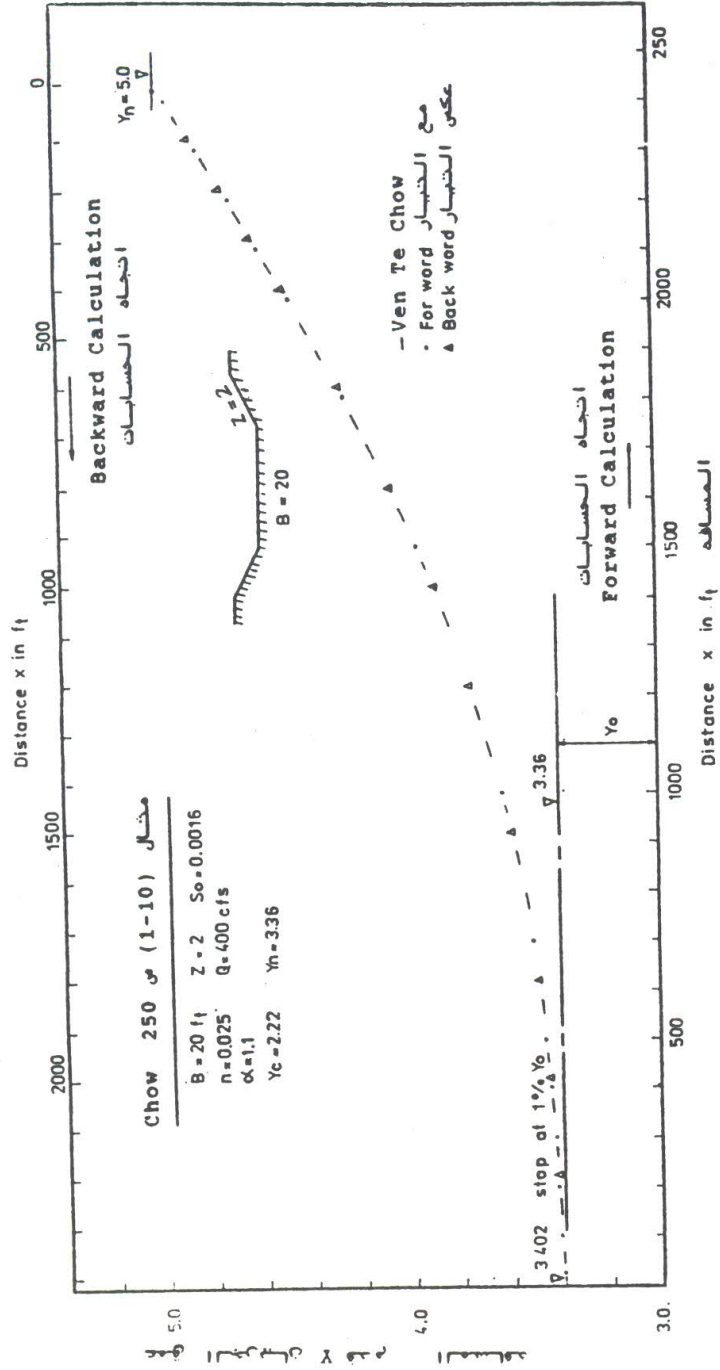
الرياضية $Y' = f(X, Y)$ ولها حدود بدائية في القيم $X_0 = X$ عندما يتكون $Y_0 = Y$. استناداً لهذه الحقيقة الرياضية فإن الحسابات يمكن إجراؤها بواسطة الخطوات وذلك بالانتقال من الحدود البدائية إلى الحدود النهائية لها. وفي هذا المجال من الحل



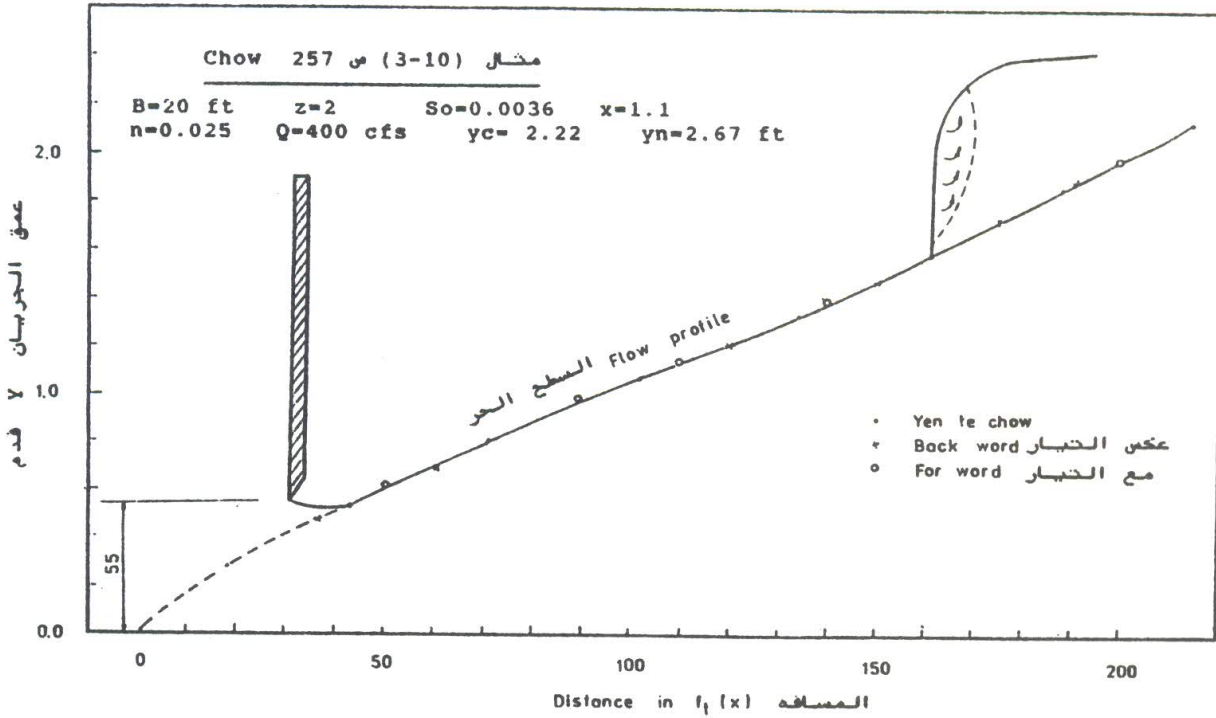
الشكل رقم (1) مخطط طريقة Runge-Kutta

أجري الكثير من الدراسات التي اعتمدت على طريقة شبه المنحرف العددية للوصول إلى هذه النتائج، أما في دراستنا هذه فسوف نتبع طريقة Runge-Kutta العددية من الدرجة الرابعة، حيث تعتبر هذه الطريقة من ناحية المبدأ مشابهة لطريقة Euler العددية أو طريقة شبه المنحرف ولكن استطاعت هذه الطريقة إدخال أربعة حدود من المتتالية العددية للمشتقات ولهذا فإن الخطأ التراكمي فيها سوف يكون من الدرجة $X^5 \Delta$. كما وأن استعمال الحاسوب يساعد على جعل هذه الطريقة أبسط وأسهل للانتقال في الحل من الحدود المعلومة إلى الحدود الأخرى بواسطة الخطوات. والمخطط الموضح في الشكل رقم (1) يبين كيفية اتباع هذه الطريقة.

إن البرنامج الذي أعد استناداً إلى المخطط أعلاه قد تم التأكد من صحته بواسطة تطبيق بعض الأمثلة النموذجية المحلولة في الكتب المرجعية التي اعتمدت على طرق أخرى للتوصل إلى هذه النتائج. الشكلان رقم (2) ورقم (3) يوضحان نتائج البرنامج الذي اعتمد على طريقة Runge-Kutta في حساب شكل السطح الحر للمثالين (1 - 10) و (2 - 10) من كتاب Chow (1959) الذي اعتمد الوحدات البريطانية في هذه الأمثلة. ولسهولة المقارنة تمت المحافظة على نفس الوحدات الأساسية، حيث يلاحظ أن النتائج جاءت مطابقة تماماً لما تم حسابه بالطرق الأخرى.



الشكل رقم (2) شكل السطح الحر M1 للجريان باستعمال
طريقة Runge - Kutta



الشكل رقم (3) شكل السطح الحر M3 للجريان باستعمال
طريقة Runge - Kutta

استناداً لما حدده الباحث (1975) Edward فإن طول الخطوة الحسابية ΔX في البرنامج أعلاه كان أقل من قيمة المقدار $3y/5S_0$ الذي يعتبر الحد الفاصل لأثر الأخطاء الحسابية التراكمية الناتجة عن الانتقال من خطوة إلى أخرى. كما وأجريت الحسابات بهذه الطريقة بالاتجاهين الأول: مع التيار، والثاني: عكس اتجاه التيار لنفس النوع من الجريان وقد اتضح بأن اتجاه الحسابات ليس له دور على دقة النتائج الحسابية وهذه الحقيقة واضحة في الشكلين رقم (2) ورقم (3). كذلك يمكن من الشكلين استنتاج آخر وهو أن المنحنى الذي يمثل السطح الحر للسائل يأخذ شكل الخط المستقيم عندما تزداد قيمة عمق الجريان حوالى 20% من العمق الطبيعي

المنتظم قبل تغييره وعدم انتظامه، وهذا يدل على أن ميل المنحنى في ذلك الجزء (dy/dx) ثابت القيمة.

شكل السطح الحر للسائل بدون وحدات

يتضح من المعادلة العامة للجريان رقم (3) أو رقم (4) بأن المتغيرات تعتمد على بعضها البعض، وأن أي تغير في قيمة أحدها سوف يؤثر على الحدود الأخرى. لهذا السبب يعتبر حل المعادلة لقيم محدودة من هذه المتغيرات هو جواب لحالة خاصة من الحالات الكثيرة والمتنوعة لهذا النوع من الجريان، وللتوصل إلى حلول أكثر عمومية نقترح فيما يلي صيغة مبسطة وعديدة الوحدات لهذه المعادلة.

بما أن المعادلة العامة للجريان يمكن كتابتها بالصيغة التالية: -

$$\alpha v \frac{dv}{dx} + g \frac{dy}{dx} = g (S_o - S_f)$$

وأن $T = dA/dy$ ومتوسط العمق الهيدروليكي للقناة يمكن كتابته بالشكل التالي $D = A/T$. بواسطة الاشتقاق والترتيب تصبح المعادلة بالشكل التالي: -

$$-\frac{VQ}{A^2} \cdot \frac{dA}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} - g \frac{dy}{dx} = S_o g \left(1 - \frac{S_f}{S_o}\right)$$

بترتيب المعادلة والتعويض عن قيمة السرعة V والضرب والقسمة على متوسط العمق الهيدروليكي في العمق المنتظم للجريان نحصل على المعادلات التالية: -

$$\frac{dy}{dx} \left(1 - \frac{VQ}{g} \cdot \frac{T}{g}\right) = S_o \left(1 - \frac{S_f}{S_o}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} \left(1 - \frac{Q^2 \cdot D_o}{A^2 D g \cdot D_o}\right) = S_o \left(1 - \frac{S_f}{S_o}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} \left(1 - \frac{V_o^2 \cdot A_o^2 \cdot D_o}{A^2 D g D_o}\right) = S_o \left(1 - \frac{S_f}{S_o}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} \left(1 - \frac{A_o^2 \cdot D_o}{A^2 D} \cdot \frac{V_o^2}{D_o \cdot g}\right) = S_o \left(1 - \frac{S_f}{S_o}\right)$$

وبقسمة طرفي المعادلة أعلاه S_o وقسمة البسط والمقام على Y_o نحصل على الصيغة العامة عديمة الوحدات التالية:

$$\frac{dy^*}{d\eta} = \frac{1 - E1}{1 - E2 \cdot Fr_o^2} \dots\dots\dots (5)$$

حيث أن:

$$y^* = \frac{y}{y_o}$$

$$E1 = \frac{S_f}{S_o} = \frac{A_o^2 R_o^{4/3}}{A^2 R^{4/3}}$$

$$E2 = \frac{A_o^2 D_o}{A^2 D}$$

$$Fr_o = \frac{V_o^2}{g D_o}$$

$$\eta = \frac{X \cdot S_o}{y_o}$$

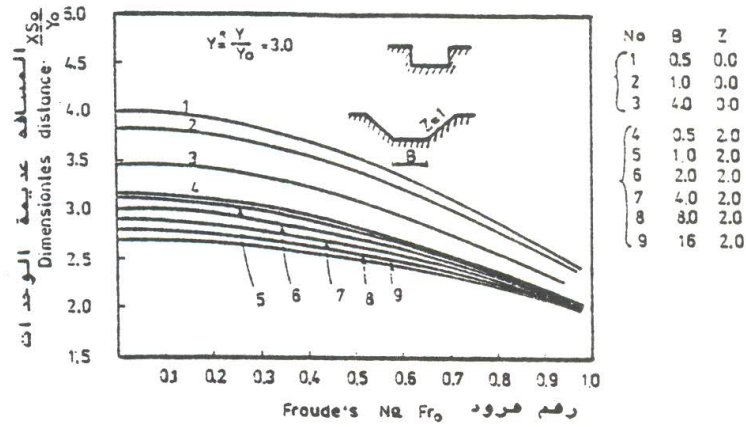
يعبر الرمز θ عن كون هذه القيم أخذت أو حسبت في مقاطع معروفة ومحددة أو مقاطع سيطرة التي يكون فيها الجريان منتظماً ومعلومًا. كما ويعطي حل هذه المعادلة تمثيلاً بيانياً للعلاقة بين العمق عديم الوحدات Y^* والمسافة العديمة الوحدات η لقيم محددة للمتغيرات الأخرى في المعادلة رقم (5). وبما أن المتغيرين $E1$, $E2$ هما متغيران تابعان للمتغير y^* بذلك يمكن كتابة المعادلة بالصيغتين التاليتين: -

$$\frac{dy^*}{d\eta} = f(y^*, Fr_0) \dots\dots\dots (a - 6)$$

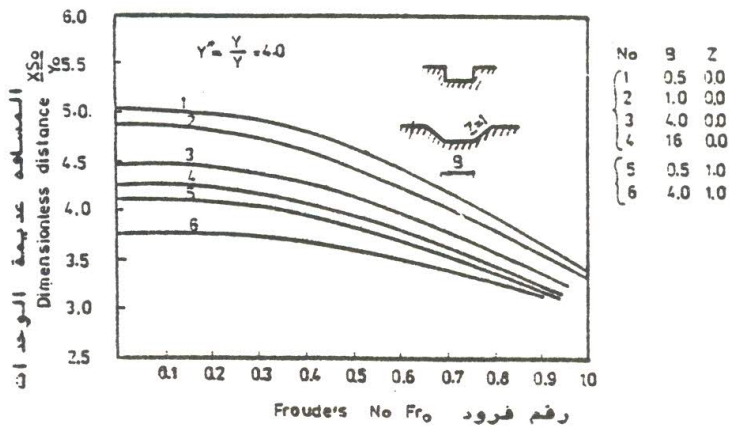
$$\eta = f(y^*, Fr_0) \dots\dots\dots (b - 6)$$

لغرض حل المعادلة العامة رقم (5) بطريقة Runge - Kutta ولإيجاد شكل السطح الحر للسائل العديم الوحدات، فقد فرضت قيم محددة لكل من رقم فرود Fr_0 وميل القناة الأولى S_0 وكذلك المقطع العرضي لها الذي تضمن الأشكال المثلثية والمستطيلة وشبه المنحرفة. حيث مثل المقطع العرضي بميل جوانب القناة ($z=0,1,2$) وكذلك قيم النسبة بين عرض قعر القناة إلى عمق الماء فيها ($b^*=B/Y=$ 0.5, 1, 2, 4, 8, 16) مما جعل مجموع المقاطع العرضية 40 مقطعاً مختلفاً. وقد كانت قيم رقم فرود محصورة بين الصفر والواحد بتباعد مقداره 0.1.

أجريت الحسابات بالاتجاهين مع التيار وعكسه، وكانت نقطة البداية أو النهاية عندما ($Y^*=1.01 Y_0$) أما النهاية الثانية للحسابات فهي 5 أضعاف العمق المنتظم ($Y^*=5 Y_0$). والشكلان رقم (4، 5) يمثلان جزءاً من هذه الحسابات.



الشكل رقم (4) علاقة المتغيرات عديمة الوحدات



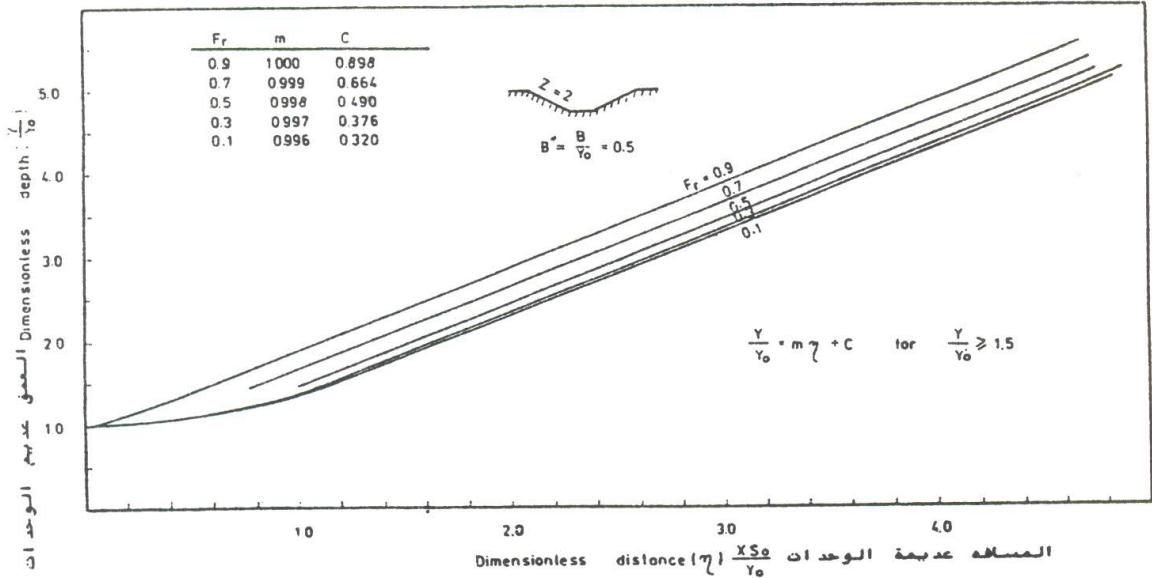
الشكل رقم (5) علاقة المتغيرات عديمة الوحدات

استنتاج المعادلات المبسطة للجريان

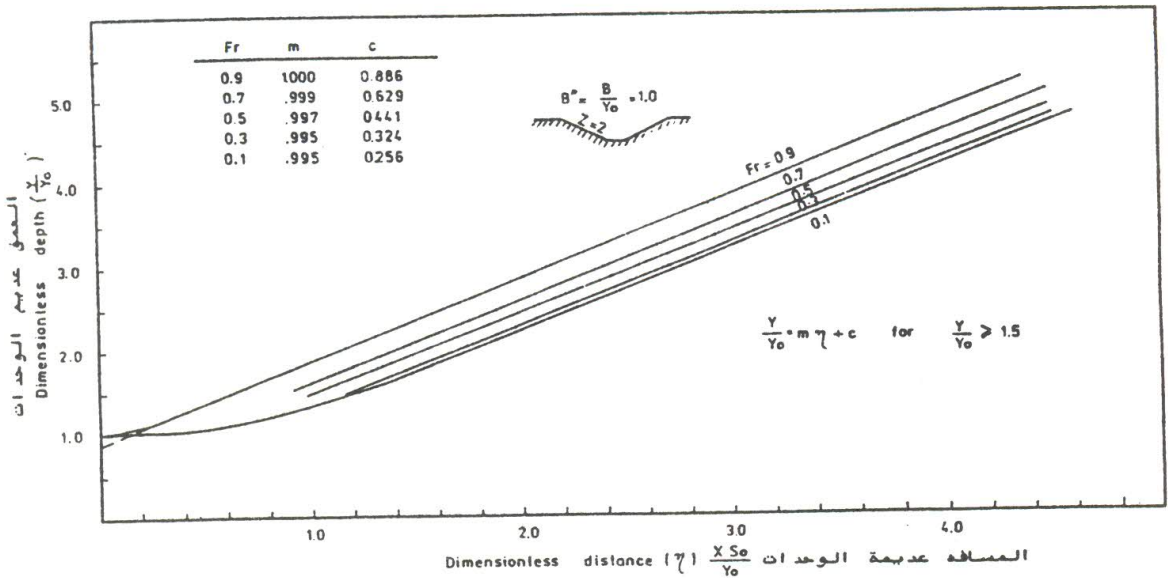
بعد تمثيل نتائج حل المعادلة رقم (5) في أشكال بيانية والموضح جزء منها في الأشكال رقم (6، 7، 8، 9) يتضح بأن شكل السطح الحر العديم الوحدات يأخذ شكل علاقة خطية بعد أن يزداد عمق الجريان ليصبح $Y^* \geq 1.5$ عند ثبات قيمة Fr_0 وبذلك يمكننا كتابة العلاقة الرياضية التي تمثل ذلك الجزء من المنحنى بالصيغة التالية: -

معادلات مبسطة لتمثيل الجريان غير المنتظم

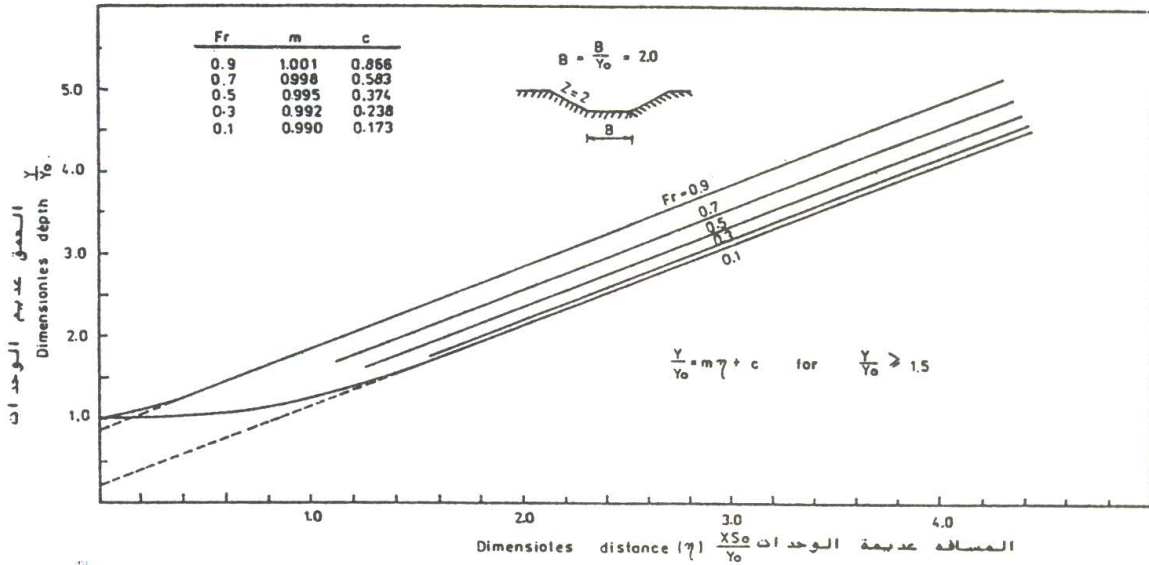
$$\frac{y}{y_0} = m \frac{X S_0}{y_0} + C \quad \text{for } \frac{y}{y_0} \geq 1.5 \quad \dots\dots\dots (7)$$



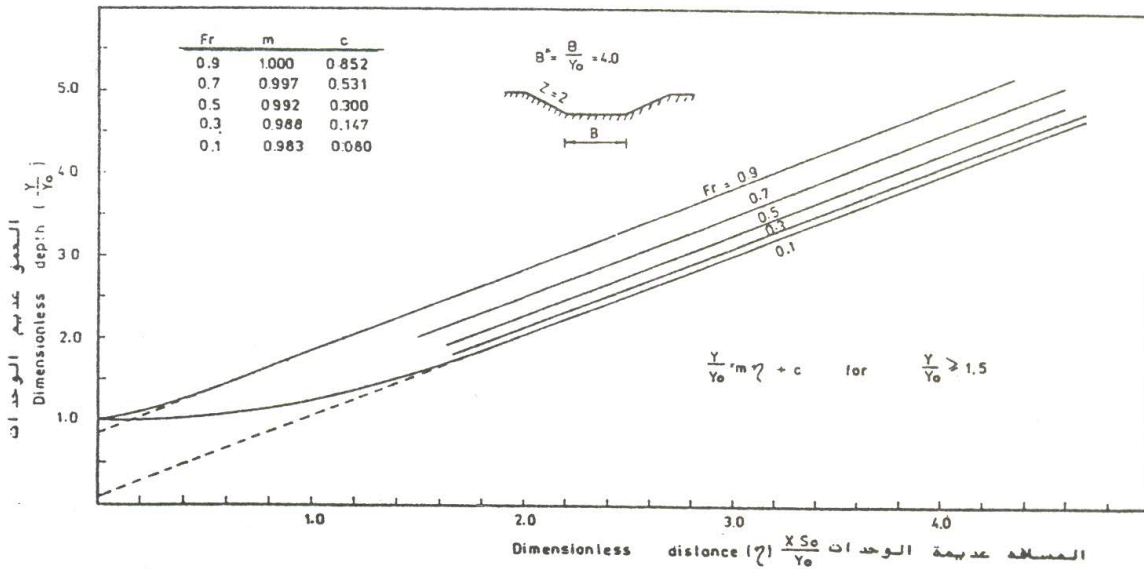
الشكل رقم (6) تمثيل عديم الوحدات للجريان



الشكل رقم (7) تمثيل عديم الوحدات للجريان

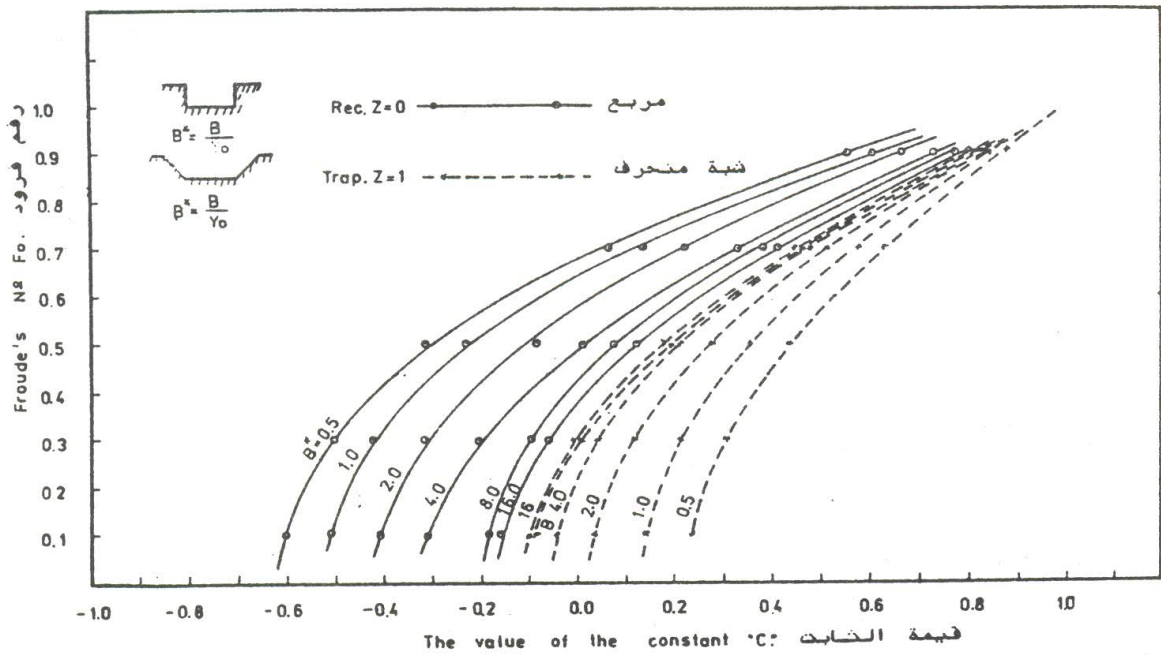


الشكل رقم (8) تمثيل عديم الوحدات للجريان

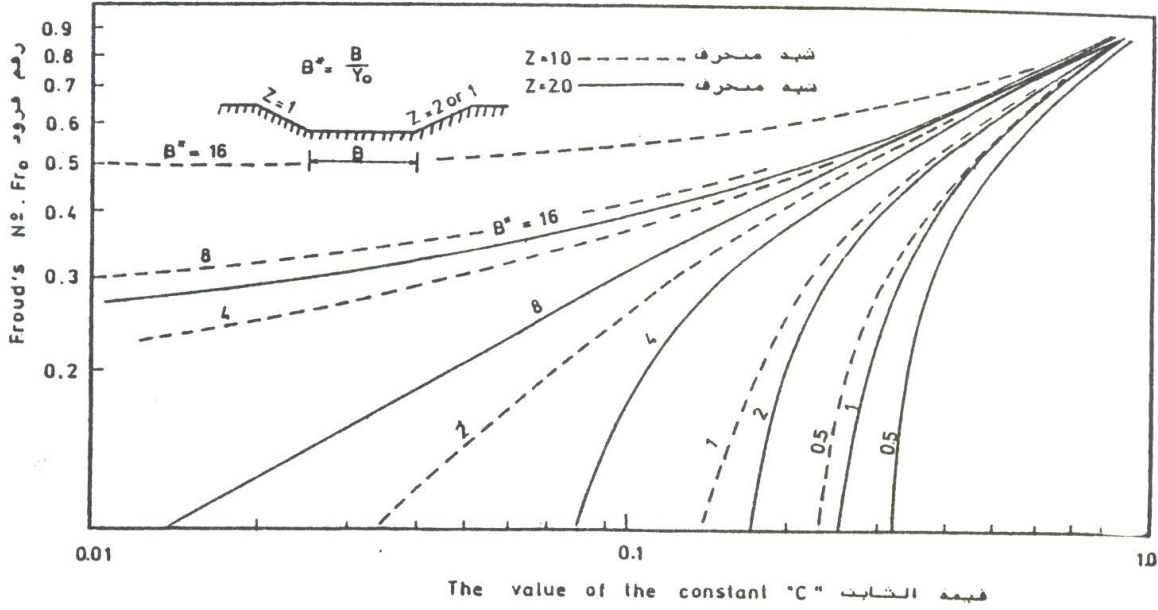


الشكل رقم (9) تمثيل عديم الوحدات للجريان

يتضح من هذه العلاقات بأن قيمة المتغير m والذي يمثل ميل الخط المستقيم له قيمة ثابتة تقريباً تتراوح بين 1 إلى 0.99 لجميع القنوات ذات المقطع شبه المنحرف ويمكن اعتبارها لأغراض التصميم ($m=1$). كما ولوحظ بأن هذه القيمة تنخفض لتصل إلى 0.92 للقنوات المستطيلة المقطع وقليلة العرض ($B^*=0.5$). أما الثابت C في المعادلة رقم (7) فإن قيمته تعتمد على قيمة كل من رقم فرود وعرض القناة، والشكلان رقم (10، 11) يمثلان هذه العلاقة حيث تزداد قيمة C دائماً بزيادة قيمة رقم فرود Fr_0 حتى تصل قيمة رقم فرود إلى الواحد حينها تصل قيمة الثابت C إلى الواحد أيضاً وبذلك تصبح قيمة العمق عديم الوحدات Y^* مساوية إلى المسافة عديمة الوحدات مضافاً إليها واحد في الجريان الحرج. حيث يكون هذا الاستنتاج صحيحاً لجميع الأشكال. كما ويعطي الجدول رقم (1) قيم كل من (m, C) في المعادلة رقم (7).



الشكل رقم (10) العلاقة بين الثابت C ورقم فرود



الشكل رقم (11) العلاقة بين الثابت C ورقم فرود

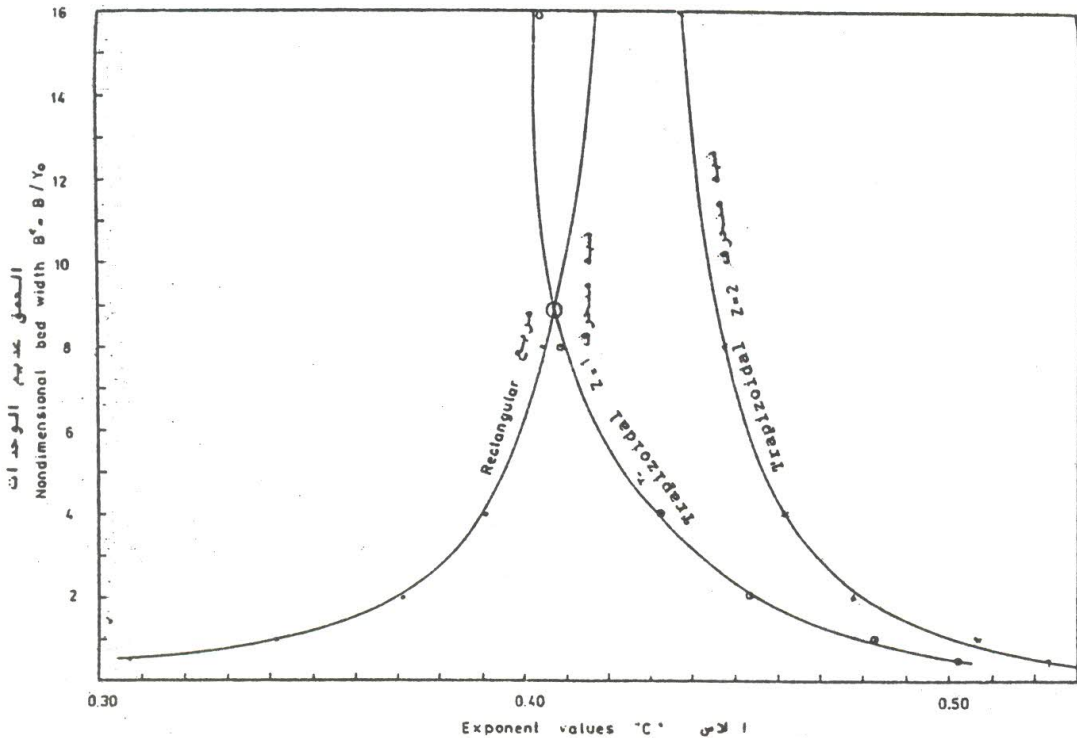
أما إذا كانت قيمة $Y \leq 1.5$ فإن هذا الجزء من المنحنى عبارة عن مجموعة من المنحنيات تبتدىء من الأحداثي الصادي وعلى ارتفاع $(y^* = 1.01)$ ، وتزداد هذه القيمة عند زيادة قيمة رقم فرود Fr_0 وثبوت المسافة كما هو موضح في الأشكال رقم (6)، (7)، (8)، (9). للحصول على الارتباط الرياضي بين المتغيرات الثلاثة في المعادلة رقم (6) لهذا الجزء من المنحنى افترضت العلاقة الرياضية التالية الملائمة لها وهي: -

$$y = a e^{bx} \dots\dots\dots (8)$$

ومن أجل الوصول إلى قيم الثوابت في المعادلة أعلاه فقد حولت العلاقة إلى علاقة خطية بأخذ لوغاريتم الطرفين وبعد التعويض عن قيم المتغيرات Y, η, Fr من النتائج السابقة وباستعمال البرنامج القياسي (Regression) تم الحصول على المعادلة الارتباطية بين المتغيرات والتي أخذت صيغتها النهائية والعامه بالشكل التالي: -

$$Y = a \cdot F_i \cdot e^{b \cdot c \eta} \dots \dots \dots (9)$$

حيث أن (a, b, c) أسس وثوابت المعادلة. تعتمد قيمتها على قيمة عرض القناة (= B*) (B/Y_o) وشكل القناة والجدول رقم (2) يحدد قيمة هذه الثوابت في المعادلة رقم (9). ويتضح من الجدول أن قيمة الثابت a يمكن اعتبارها 1.01 لجميع الأشكال وهي قيمة مساوية لقيمة Y* عند الحدود البدائية لشكل السطح الحر العديم الوحدات. أما قيمة الأس b فهي تتغير من 0.101 إلى 0.138 بالاعتماد على قيمة B* وكذلك الحال بالنسبة للأس c تتغير قيمته مع قيمة B* حتى تصبح قيمة هذا الأس ثابتة عندما تكون القناة عريضة جداً بالمقارنة مع عمق السائل فيها وبالتحديد عندما تكون قيمة B* ≥ 16 وبذلك تكون قيمة الأس c=0.41 للقناة المستطيلة و c=0.405 للقناة شبه المنحرف ذات الميل z=1 وأخيراً c=0.437 عندما z=2 والشكل رقم (12) يوضح هذه الحقيقة.



الشكل رقم (12) العلاقة بين الأسس c وعرض القناة B

الجدول رقم (1)

$B^* = \frac{B}{Y_0}$	F_0	Z = 0.0		Z = 1.0		Z = 2.0	
		m	c	m	c	m	c
$B^* = 0.5$.1	.9206	-.605	.998	.234	.996	.320
	.3	.922	-.499	.998	.305	.997	.376
	.5	.938	-.314	.996	.437	.998	.490
	.7	.941	.065	.998	.626	.999	.664
	.9	.950	.552	1.000	.881	1.000	.898
$B^* = 1.0$.1	.932	-.506	.995	.140	.995	.256
	.3	.939	-.419	.994	.218	.995	.324
	.5	.952	-.230	.996	.357	.997	.441
	.7	.954	.135	.998	.572	.999	.629
	.9	.962	.605	1.003	.845	1.000	.886
$B^* = 2.0$.1	.952	-.409	.991	.034	.990	.173
	.3	.957	-.317	.990	.120	.992	.238
	.5	.953	-.069	.992	.279	.995	.374
	.7	.967	.221	.996	.518	.998	.583
	.9	.974	.670	1.000	.858	1.001	.866
$B^* = 4.0$.1	.967	-.311	.986	-.0404	.983	.080
	.3	.967	-.200	.987	.0454	.988	.147
	.5	.968	.012	.991	.212	.992	.300
	.7	.972	.331	.994	.479	.997	.531
	.9	.984	.733	.999	.826	1.000	.852
$B^* = 8.0$.1	.965	-.180	.985	-.086	.982	.014
	.3	.970	-.099	.985	.009	.983	.093
	.5	.979	.077	.987	.191	.989	.244
	.7	.982	.383	.992	.462	.995	.494
	.9	.993	.775	1.000	.825	1.000	.842
$B^* = 16$.1	.977	-.159	.981	-.089	.985	-.064
	.3	.978	-.058	.985	-.008	.986	.025
	.5	.983	.125	.987	.182	.987	.212
	.7	.990	.413	.990	.452	.995	.470
	.9	.997	.804	1.000	.810	1.001	.835

الخلاصة

يمكن تلخيص البحث في النقاط الثلاثة الأساسية التالية:
 1 - تعتبر طريقة Runge - Kutta سهلة وسريعة وملائمة في كتابة البرامج واستخراج النتائج باستعمال الحاسوب.

الجدول رقم (2)

z	B	a	b	c
0.0	0.5	1.04236	.13853	.30705
0.0	1.0	1.01305	.13222	.34115
0.0	2.0	1.01132	.13766	.37104
0.0	4.0	1.01966	.13755	.39073
0.0	8.0	1.02935	.13348	.40401
0.0	16	1.01523	.12892	.41676
1.0	.5	1.01566	.10556	.50206
1.0	1.0	1.01600	.109749	.48272
1.0	2.0	1.1311	.11785	.45382
1.0	4.0	1.0238	.11785	.43202
1.0	8.0	1.0406	.11774	.40765
1.0	16	1.013	.11703	.43371
2.0	.5	1.01042	.10127	.52373
2.0	1.0	1.01217	.10575	.50662
2.0	2.0	1.02457	.12034	.47742
2.0	4.0	1.02808	.11742	.46104
2.0	8.0	1.022929	.12382	.44768
2.0	16.0	1.01447	.12198	.43744

2 - يمكن إجراء الحسابات في هذه الطريقة بالاتجاهين مع التيار وعكسه مهما كان نوع الجريان.

3 - المعادلتان المستنتجتان والمقترحتان في هذا البحث (رقم 7 و 9) يمكن استعمالهما لأغراض التصميم بصورة مباشرة بدون العودة إلى المعادلة التفاضلية الأساسية للجريان غير المنتظم.

المراجع

شاكر جليل «استعراض الطرق العددية لدراسة الجريان غير المنتظم في القنوات المكشوفة» مجلة قاريونس، العدد 1، 1992، بنغازي - ليبيا.

Apelt J. & Colin «numerical method of computing flow profile» j. of H.D, ASCE, HY 10 Oct. 1969.

Belonger J.B. «Essay on the numerical solution of some problems relative to the steady flow of water» Carilon - Gecury Paris 1928.

Chow V.T. «Open channel hydraulics» Mc. Craw - Hill Book Company INC. New York, London 1959.

Edward M. & Frank P. «Numerical errors in water profile computation» J. of H. D., ASCEeHy 11 nov. 1975.

Henderson F.M. «Open channel flow» The Macmillan Book Comp. 1966.

Kordas B. & Kowalska E. «Numerical modelling of back water curves in rivers and open channels» Inst. of water Eng. Technical University 1980 Cracow, Poland.

Prosad R. «Numerical method of computing flow profile» J. of H.D. ASCE, HY 4 April 1970.