DOI: https://doi.org/10.54172/mjsc.v5i1.561

النموذج الرياضي لحركة دولاب مركبات النقل

سلمان عبيد هليل*

الملخص

يتناول البحث وضع النموذج الرياضي لحركة دولاب مركبات النقل ، ويتضمن كتابة التمثيل الرياضي للقوى والعزوم المختلفة المؤثرة على كل من الدولاب ومركبة النقل لمختلف أنظمة الحركة . ويشتمل كذلك على (النمذجة) الرياضية لمعامل الاحتكاك بين الدولاب والطريق بخيارات متعددة .

وقد تمت ترجمة هذا النموذج على هيئة برنامج على الحاسبة الإلكترونية بلغة فورتران – 77 . وبذلك يمكن استعمال النموذج لحساب مختلف معالم ومتغيرات الحركة لكل من الدولاب ومركبة النقل فى آن واحد .

المقدمة

لقد كان اكتشاف الإنسان للدولاب (العجلة) wheel نقلة نوعية فى سلم الحضارة ، حيث وفر الدولاب كآلة للإنسان جهدا عضليا كبيرا فى تحريك ونقل الأشياء ، ويدخل الدولاب فى صناعة الكثير من الأجهزة والماكينات كوحدة أساسية . ومع تطور العلوم والتقنية تتولد الحاجة لتطوير وتحسين الماكينات ومركبات النقل ، ويشتمل التطوير على وضع تصاميم حديثة تتميز بحسن الأداء والدقة فى العمل والاقتصاد فى المواد الأولية وتوفير مستوى عال من أمان العمل والحركة وتقليل مشكلة تلوث البيئة وغيرها .

إن ظهور الحاسبات الإلكترونية قد وفر فرصة إجراء تصاميم دقيقة للأجهزة المستخدمة كما أتاح توفيرا فى الوقت والجهد المصروف فى عمليات التصميم والاختبارات .

* جامعة عمر المختار ، كلية الهندسة ، البيضاء – ليبيا .

© للمؤلف (المؤلفون)، يخضع هذا المقال لسياسة الوصول المفتوح ويتم توزيعه بموجب شروط ترخيص إسناد المشاع الإبداعي CC BY-NC 4.0

ويعتبر وضع النموذج (الموديل) الرياضي mathematical model لأي آلية أو منظومة أو منشأة مرحلة مهمة من مراحل التصميم . وتعرف النمذجة modeling بأنها طريقة لدراسة نظام أو ظاهرة معينة وذلك باستبدال النظام الحقيقي الأصلي بتموذج فيزيائي أو رياضي أكثر ملائمة للدراسة أو التحليل مع الاحتفاظ بكل الصفات والخصائص الجوهرية للنظام الأصلي (Katsuhiko, 1982) .

حركة دولاب مركبات النقل

يمثل دولاب مركبات النقل مسندا ونقطة ارتكاز لها أثناء وقوفها وآلية يجري من خلالها تبادل القوى والعزوم بين الطريق والمركبة فى أثناء مسيرها ، ويتألف الدولاب من قرص معدني مثبت عليه إطار مطاطي مملوء بالهواء المضغوط .

ويمكن تصنيف حركة الدولاب اعتمادا على مقدار التشويه الحاصل لكل من الطريق والإطار إلى ما يلي (Grishkevich, 1986) :

1- حركة إطار قابل للتشويه على طريق غير قابل للتشويه ، ويكون عندئذ مقدار التشويه الحاصل فى الطريق صغيرا جدا مقارنة بالتشويه الحاصل للإطار ، ويتجلى ذلك فى سير مركبات النقل على الطرق المعبدة .

2- حركة إطار غير قابل للتشويه على طريق قابل للتشويه ، وعندئذ يكون مقدار التشويه الحاصل للطريق كبيرا مقارنة بتشويه الإطار ، ويلاحظ ذلك عند حركة مركبة النقل على طريق رملية أو طينية أو عند مسير مركبة ذات جنازير على طرق غير معبدة .

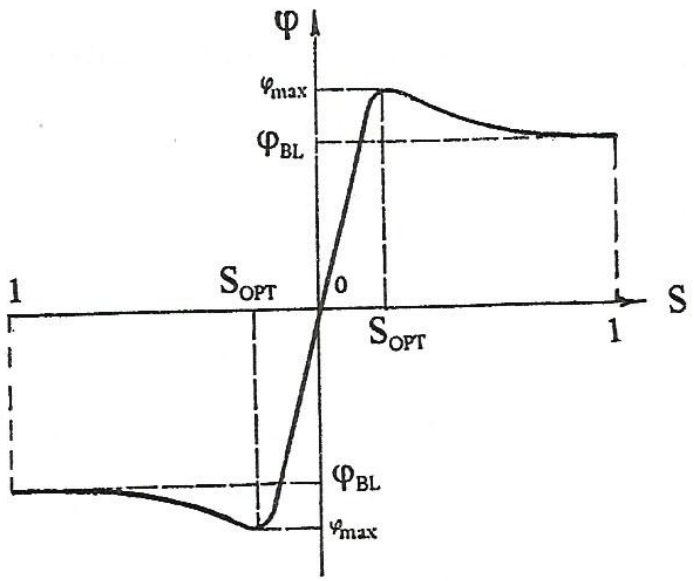
3- حركة إطار قابل للتشويه على طريق قابل للتشويه أيضا ، ويلاحظ ذلك عند مسير مركبة بإطارات مطاطية مملوءة بهواء ذي ضغط منخفض على طرق رملية أو طينية .

ويجري تبادل القوى والعزوم بين مركبة النقل والطريق من خلال الدولاب ذي الإطار المطاطي ، وعندما يسلط محرك مركبة النقل عزما على الدولاب يتحول العزم إلى قوة يؤثر بها الدولاب على الطريق فيرد الطريق بقوة مساوية لها بالمقدار ومعاكسة بالاتجاه تقوم

بدفع المركبة للأمام . وعندما يضغط السائق دواسة الفرملة brake يتولد عزم احتكاكي في جهاز فرملة الدولاب يقوم بعرقلة الدولاب عن الحركة فتولد قوة احتكاكية بين الإطار والطريق تؤثر على المركبة فتقلل سرعتها أو توقفها عن الحركة . وفي كلتا الحالتين – سواء أكان في نظام التعجيل أم في نظام الفرملة – تعتمد قوة رد فعل الطريق بصورة رئيسية على معامل الاحتكاك coefficient of friction بين الإطار والطريق .

معامل الاحتكاك بين الطريق والدولاب

تعتمد قيمة معامل الاحتكاك φ بين الطريق والدولاب بشكل رئيسي على معامل S الانزلاق slip coefficient ، ويتضح في الشكل 1 مخطط φ – S ويمثل العلاقة بين معامل الاحتكاك ومعامل الانزلاق ، ويتم الحصول على هذه المخططات تجريبيا (Grishkevich, 1986) .



شكل 1 : علاقة معامل الاحتكاك φ مع معامل الانزلاق S .

ويحسب معامل الانزلاق S بالمعادلة التالية :

$$\left.\begin{array}{ll} S = \dfrac{\omega r - V_x}{\omega r} & \text{فى نظام تعجيل المركبة} \\ S = \dfrac{V_x - \omega r}{V_x} & \text{فى نظام فرملة المركبة} \end{array}\right\} \quad (1)$$

حيث أن V_x – السرعة الخطية لمحور الدولاب ، وتساوي سرعة المركبة ، m/s .

ω – السرعة الدورانية للدولاب حول محوره ، rad/s .

r – نصف قطر الدولاب ، m .

ويُقسّم المخطط φ - s إلى جزئين : الأول يمثل انزلاق الدولاب بسبب تعجيل دورانه ، والثاني يمثل انزلاق الدولاب بسبب فرملته . تتراوح قيم معامل الانزلاق بين S = 0 فى حالة الدحرجة الحرة (دون انزلاق) وبين S = 1 فى حالة الانزلاق التام . ويتضح من المخطط أن معامل الاحتكاك φ يزداد طرديا بزيادة معامل الانزلاق حتى يصل أقصى قيمة له φ_{max} ، وتوافق هذه مقدارا (مثاليا S_{OPT}) ويقع الأخير عادة فى المدى 0.4 ... 0.1 من معامل الانزلاق ، وتنقص قيمة معامل الاحتكاك عند تجاوز معامل الانزلاق للمقدار S_{OPT} حتى تصبح قيمة معامل الاحتكاك مساوية للمقدار φ_{BL} ويوافق ذلك انزلاقا تاما (تزحلقا) للدولاب S = 1 . وتعطى عادة فى المراجع قيم φ_{BL} للمواد تحت اسم معامل الاحتكاك الكيناتيكي μ_k . وتؤخذ قيمة معامل الاحتكاك عند التزحلق (S = 1) عادة φ_{BL} = (0.8 ... 0.85) φ_{max} . وتحصل عملية تزحلق الدولاب فى حالتين :

1- عندما يسلّط عزم فرملي كبير بحيث يتوقف الدولاب عن الدوران (ينقفل locked) فى حين ما تزال المركبة كجسم فى حالة حركة (S = 1 ، $\varphi = \varphi_{BL}$) .

2- عندما يسلط محرك المركبة فى بداية الإقلاع عزما تعجيليا كبيرا بحيث يبدأ الدولاب بالدوران sliped حول محوره فى حين أن المركبة كجسم مازالت متوقفة ($\varphi = \varphi_{BL}$ ، $S = 1$) .

ولأجل وضع النموذج الرياضي للعلاقة $\varphi = f(S)$ ، تستخدم مجموعة من الخيارات نذكر منها الآتي :

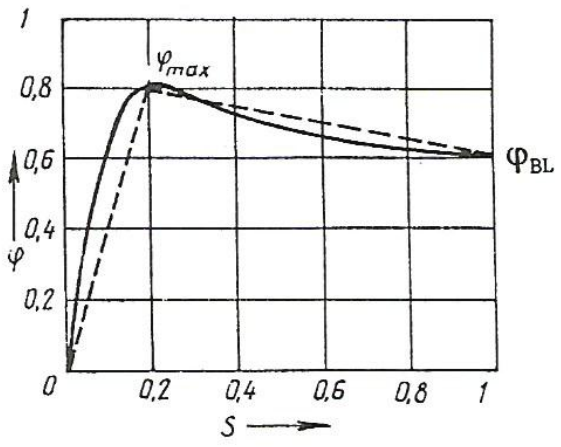
1- يمكن تقريب منحنى العلاقة $\varphi - S$ إلى خطين مستقيمين (شكل 2) وكتابة معادلة كلا الخطين كما يلي :

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi = a_1 S & \text{عندما } 0 < S < S_{OPT} \\ \varphi = a_2 S & \text{عندما } S_{OPT} < S < 1 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

حيث أن a_1 و a_2 – هما ميلا المستقيمين وأن :

$$a_1 = \frac{\varphi_{max}}{S_{OPT}}$$

$$a_2 = \frac{\varphi_{BL} - \varphi_{max}}{1 - S_{OPT}} \quad \text{و}$$



شكل 2 : تقريب منحنى العلاقة $\varphi - S$ إلى مستقيمين

2- يمكن وضع منحنى العلاقة S - φ على هيئة تعبير جبري متعدد الحدود وعلى الصورة التالية :

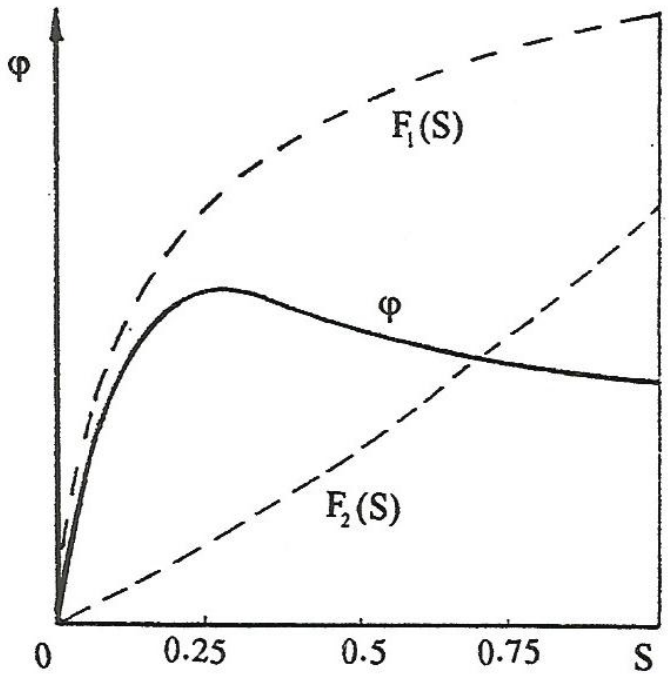
$$\varphi = b_1S + b_2S^2 + b_3S^3 \qquad (3)$$

حيث إن b_1 , b_2 , b_3 – ثوابت .

3- تكتب العلاقة S - φ على أنها مجموع دالتين (شكل 3) للوغاريتم الطبيعي وعلى الهيئة التالية :

$$\varphi = F_1(S) - F_2(S) = 1 - e^{-K_1S} - k_2S^{k_3} \qquad (4)$$

حيث أن k_1 , k_2 , k_3 – ثوابت .



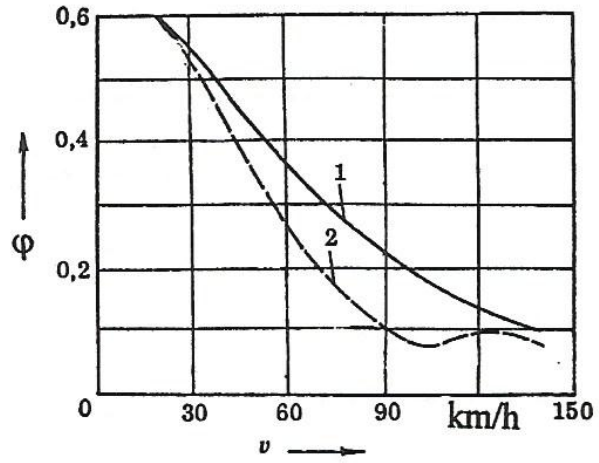
شكل 3 : تقريب منحنى العلاقة S – φ إلى دالتين هما :

$$F_1(S) = [1 - e^{-k_1S}] \text{ و } F_2(S) = [k_2S^{k3}]$$

4- تعطى العلاقة $\varphi - S$ على شكل جدول مكون من مجموعة من النقاط للإحداثيين S و φ .

ويتم اختيار واحدة من الخيارات السالفة الذكر اعتمادا على طبيعة النموذج الرياضي وعلى نوع ودقة المعلومات المستحصلة للعلاقة $\varphi - S$ من الاختبارات .

يعتمد معامل الاحتكاك على مجموعة عوامل أخرى منها : مواصفات الطريق وحالته ، خصائص الإطار وحالته ، السرعة الخطية لمحور الدولاب وغيرها . ومن الملاحظ أن معامل الاحتكاك يقل مع زيادة سرعة المركبة خصوصا على الطريق المبللة ، ويمكن اعتماد أحد المعادلات التالية التي تراعي انخفاض معامل الاحتكاك مع زيادة السرعة كما هو موضح فى الشكل 4 (المنحنيات 1 و 2) (هليل ، 1997) .



شكل 4 : تناقص معامل الاحتكاك مع زيادة سرعة المركبة .

$$\left.\begin{aligned} \varphi_v &= \varphi_o(1 - C_1 V_x) \\ \varphi_v &= \varphi_o\, e^{C_2 \sqrt[3]{V_x}} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

حيث أن :

φ_v – معامل الاحتكاك بين الطريق والإطار عندما تكون سرعة المركبة V_X .

φ_o – معامل الاحتكاك بين الطريق والإطار عند السرعة المنخفضة .

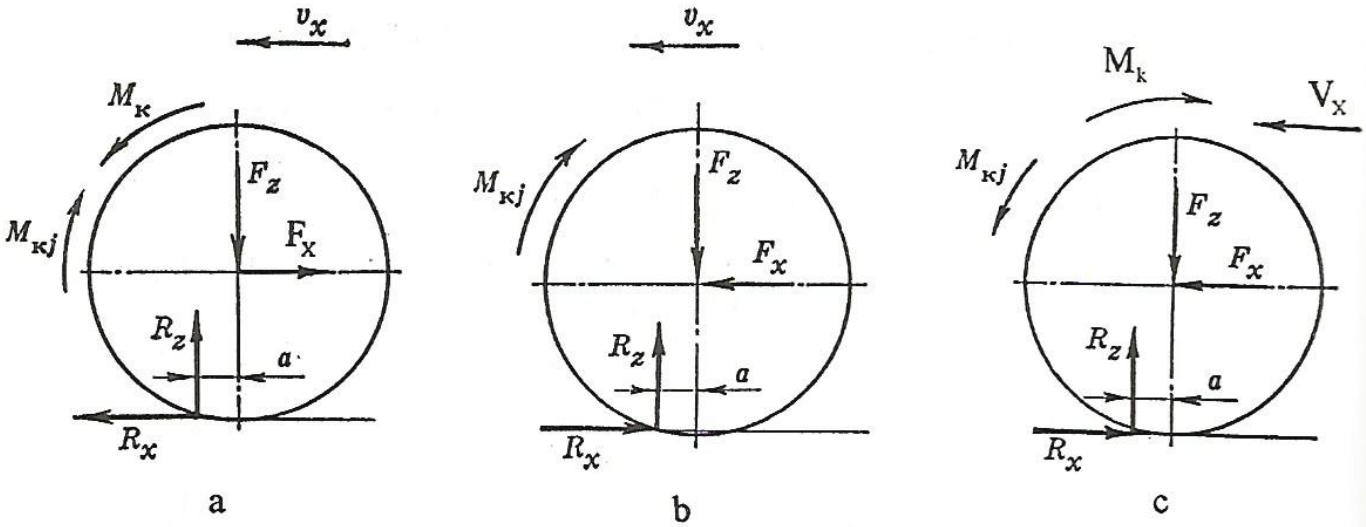
C_1 , C_2 – ثوابت تجريبية .

القوى والعزوم المؤثرة على الدولاب

يسلط جسم مركبة النقل على الدولاب عزما M_K وقوة طويلة F_X وقوة الحمل العمودي F_Z . وتعتبر القوة F_X موجبة إذا كانت متفقة بالاتجاه مع سرعة المركبة ، ويكون العزم M_K موجبا دافعا إذا كان متفقا مع اتجاه السرعة الدورانية للدولاب ، أما إذا أثر بعكس اتجاه سرعة الدولاب الدورانية فيعتبر عزما فرمليا سالبا . ويرد الطريق على الحمل العمودي بقوة رد فعل الطريق الشاقولي R_Z ، وتؤثر أيضا قوة رد فعل الطريق الطولي R_X وتكون موازية للطريق ويعتمد اتجاهها على نظام عمل الدولاب وتعتبر القوة R_X موجبة إذا اتفق اتجاها مع اتجاه سرعة مركبة النقل ، وسالبة إذا أثرت بعكس اتجاه سرعة المركبة . ويتضح فى الشكل 5 مخطط للقوى والعزوم المؤثرة على الدولاب فى أنظمة حركته المختلفة .

ويؤثر على الدولاب عزم مقاومة التدحرج M_f بسبب انزياح قوة رد فعل الطريق العمودية R_Z باتجاه الأمام لمسافة مقدارها a عن الخط الشاقولي المار بمركز الدولاب ، ويحصل هذا الانزياح لعدم تماثل الضغط فى الجزئين الأمامي والخلفي لمنطقة (بيضوي) تلامس الدولاب مع الطريق . ويكون عزم مقاومة التدحرج معاكسا لاتجاه الحركة ويحسب بالمعادلة التالية :

$$M_f = aR_Z = r\,\frac{a}{r}\,R_z = rfR_z = rF_f$$



شكل 5 : مخطط القوى والعزوم المؤثرة على دولاب مركبة النقل ،

a – فى نظام التعجيل ، b – فى نظام الدحرجة الحرة ، c – فى نظام الفرملة .

حيث إن f – معامل مقاومة تدحرج الدولاب ويؤخذ عادة 0.05 ... f = 0.01 ؛ F_f – قوة مقاومة تدحرج الدولاب .

يمكن وضع معادلة حركة الدولاب عند دورانه حول محوره بمساعدة المعادلة التفاضلية للحركة الدورانية للجسم الصلب على الهيئة التالية (Beer & Johnston ,1990)

$$(I_K + I_P)\frac{d\omega}{dt} = \sum M_{ext}$$

حيث أن :

I_k – عزم القصور الذاتي للدولاب ، $kg \cdot m^2$.

I_p – عزم القصور الذاتي للأجزاء الميكانيكية المتصلة بالدولاب ، وتشتمل على الأجزاء الدوارة من المحرك وأجهزة نقل الحركة .

M_{ext} – عزم القوى الخارجية المؤثرة على الدولاب N.m .

يتضح فى الشكل 5 مخطط القوى والعزوم المؤثرة على الدولاب ، وبعد تعويض مقادير العزوم تصبح المعادلة السابقة كما يلي :

$$\left.\begin{aligned} (I_k + I_p)\frac{d\omega}{dt} &= M_k - rF_f - rR_x \\ R_x &= \frac{M_K}{r} - F_f - \frac{I_k + I_p}{r}\frac{d\omega}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

حيث أن :

$\frac{M_k}{r}$ و M_k – مقدار القوة المحيطية المسلطة على الدولاب وعزمها على التوالي .

$\frac{I_k + I_p}{r}\frac{d\omega}{dt}$ و M_{kj} – قوة مقاومة الدولاب والأجزاء المتصلة به للتعجيل (الاستمرارية) وعزمها على التوالي .

واعتمادا على العزم المسلط على الدولاب ذي الإطار المطاطي يمكن فرز ثلاثة أنظمة رئيسية لحركته على الطرق غير القابلة للتشويه :

1- حركة الدولاب فى حالة تعجيل : وفيه يؤثر جسم السيارة على الدولاب بالقوة F_x وباتجاه معاكس لحركة مركبة النقل ، ويعتبر الدولاب فى هذا النظام قائدا ، أما قوة رد فعل الطريق الطولية R_x فتؤثر على الدولاب باتجاه يتوافق مع حركة مركبة النقل (انظر الشكل a – 5) ، وتحسب R_x لهذا النظام بالمعادلة (6) . ويجري حساب M_k بالمعادلة التالية :

$$M_k = M_e\, i_T\, \eta_T$$

حيث إن :

M_e – العزم الذي يسلطه المحرك .

i_T – نسبة التخفيض الكلية لأجهزة نقل الحركة .

η_T – الكفاءة الكلية لأجهزة نقل الحركة .

2– حركة الدولاب فى حالة دحرجة حرة : ويعتبر الدولاب فى هذا النظام منقـادا وتكون قيمة العزم المؤثرة على الدولاب $M_k = 0$ مساوية للصفر (الشكل 5 – b) . ويحصـل ذلك عند حركة الدواليب القائدة عند فصلها عن المحرك أو حركـة الدواليـب الأماميـة المنقادة . وتحسب قوة رد فعل الطريق R_x الطولية بالمعادلة التالية :

$$R_X = -F_f - \frac{(I_k + I_p)}{r}\frac{d\omega}{dt} \qquad (7)$$

3– حركة الدولاب فى حالة فرملة : وفيه يكون تأثير العزم M_k مؤثـرا باتجـاه معاكس لدوران الدولاب وتحصل هذه الحالة عند فرملة مركبـة النقـل (الشـكل 5-c) ، وتكتب معادلة قوة رد فعل الطريق الطويلة R_X كما يلي :

$$R_X = -\left[\frac{M_k}{r} + F_f + \frac{(I_k + I_p)}{r}\frac{d\omega}{dt}\right] \qquad (8)$$

ويحسب تعجيل مركبة النقل a_x فى أي لحظة من الزمن للأنظمة المختلفة لحركة مركبة النقل بالصيغة التالية :

$$a_X = \frac{\sum_1^n R_X}{m} \qquad (9)$$

حيث أن :

n – عدد دواليب مركبة النقل .

m – كتلة مركبة النقل ، kg .

وتتحدد سرعة مركبة النقل V_X فى أي لحظة من الزمن بالمعادلة التالية :

$$V_x = V_o + \int_{t_o}^{t} a_x dt \qquad (10)$$

حيث إن :

V_o – سرعة مركبة النقل الابتدائية (أو سرعة الخطوة السابقة من التكامل) .

t_o , t – الفترة الزمنية التي يجري فيها التكامل .

وتتعين إزاحة مركبة النقل X على النحو التالي :

$$X = X_o + \int_{t_o}^{t} V_x dt \qquad (11)$$

حيث إن :

X_o – الإزاحة الابتدائية لمركبة النقل .

وراعينا فى أثناء وضع النموذج الرياضي الافتراضات التالية : إن المركبة تتحرك على طريق أفقي وعلى خط مستقيم ، وغياب الحركة النسبية بين الدولاب وجسم مركبة النقل ، وثبوت نصف قطر الدولاب .

النتائج

لقد تم وضع النموذج الرياضي المذكور على شكل برنامج على الحاسبة الإلكترونية بلغة فورتران – 77 لحساب معالم حركة دولاب مركبة النقل ، ويتألف خوارزم الحساب من البرنامج الرئيسي وعدد من البرامج الفرعية . ففي البرنامج الرئيسي تم إدخال المعطيات الأولية للحساب واستدعاء البرامج الفرعية وطباعة نتائج الحسابات ، وفي البرنامج الفرعي RIGHT يجري حساب مقادير الأطراف اليمنى من المعادلات التفاضلية لغرض إجراء التكامل العددي لها ، والبرنامج الفرعي RK هو برنامج مخصص لتكامل المعادلات التفاضلية باستخدام طريقة رونج كوتا من الدرجة الرابعة ، وأن خطوة التكامل المعتمدة فيه

هي 0.01 s (زرتي ، 1992) . ولقد أعطيت العلاقة φ - S على شكل جدول وخصص البرنامج الفرعي PLIN لحساب قيمة معامل الاحتكاك من جدوله .

وسنعتمد نظام فرملة دولاب مركبة النقل كنموذج حالة ، حيث يسلط جهاز الفرملة عزما فرمليا على الدولاب ، ويعتمد مقداره على مقدار ضغط مائع التشغيل في داخل اسطوانات فرامل الدواليب . وعندما يضغط السائق بشدة على دواسة الفرامل فإن الضغط P في الاسطوانات يتزايد مع الزمن ، ويخضع تزايده للمعادلة التالية :

$$P = P_{max} (1 - e^{-kt})$$

حيث إن :

P_{max} – أقصى ضغط يمكن الوصول إليه في منظومة الفرامل (N/m^2) .

K – ثابت ؛ t – الزمن ، s .

ويرافق التزايد في الضغط بداخل الاسطوانات تزايد في العزم الفرملي ، وقد تعطي المعادلة التالية تقريبا عاليا للعزم الفرملي كدالة للضغط في الاسطوانات :

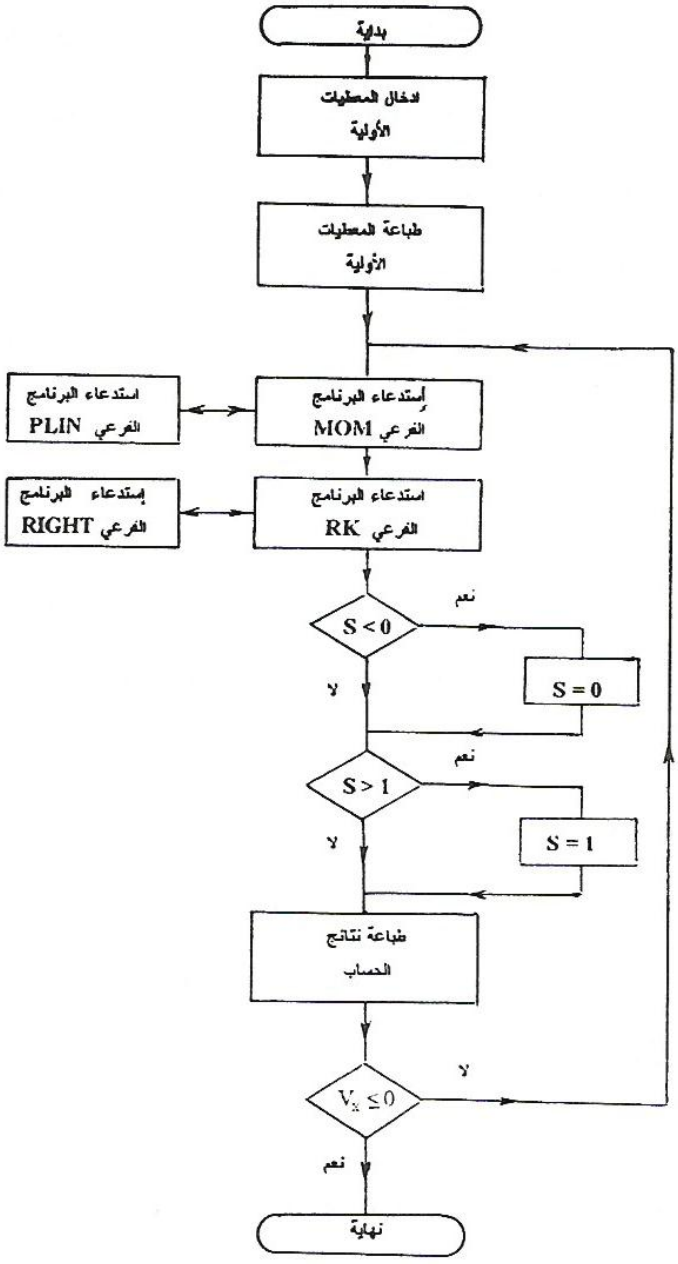
$$M_k = d_o + d_1 P + d_2 p^2 \qquad (12)$$

حيث أن :

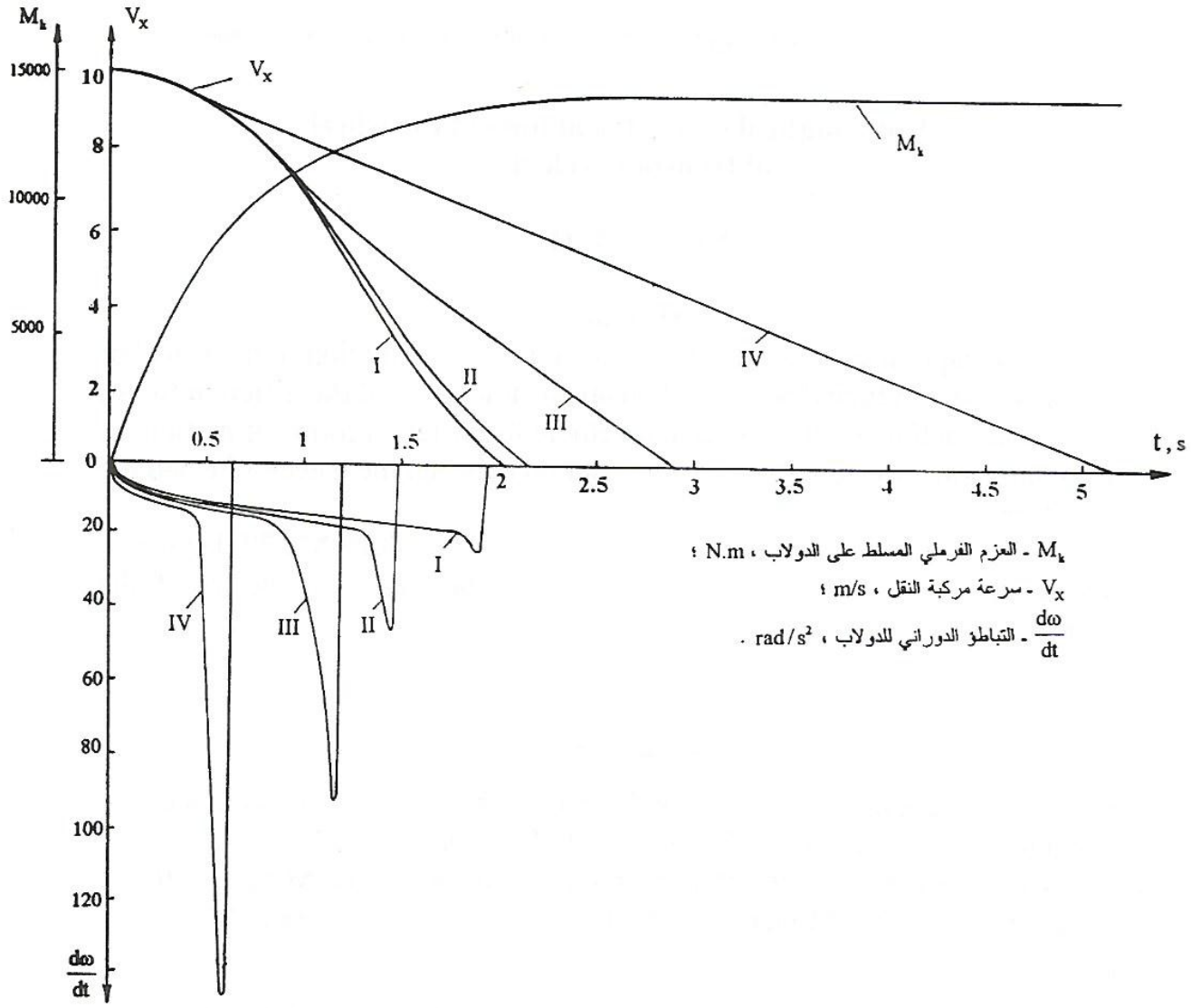
d_o , d_1 , d_2 – ثوابت الدالة متعددة الحدود .

ويتضح في الشكل 6 المخطط الانسيابي لخوارزم الحساب . ولقد تم إجراء نموذج الحساب لمركبة شحن حمولتها الكلية 15 طنا ، يجري فرملتها بشدة من سرعة 36 km/h حتى تتوقف تماما عن الحركة ، وعلى طرق أفقية مستقيمة ذات معاملات احتكاك مختلفة المقادير .

ويتضح في الشكل 7 نتائج فرملة مركبة النقل على طرق ذات معاملات احتكاك مختلفة ($\varphi = 0.8$ و $\varphi = 0.6$ و $\varphi = 0.4$ و $\varphi = 0.2$) . ويلاحظ أن الفرملة بشدة على طرق ذات معامل احتكاك منخفض $\varphi = 0.4$ و $\varphi = 2.0$ تقود إلى الانقفال المبكر لدواليب



شكل 6 : المخطط الإنسيابي لخوارزم الحساب .



شكل 7 : نتائج تأثير العزم الفرملي على كل من سرعة مركبة النقل وحركة دولابها على الطرق المختلفة

I – طريق معامل احتكاكه $\varphi_{BL} = 0.8$ ؛ II – طريق معامل احتكاكه $\varphi_{BL} = 0.6$ ؛

III – طريق معامل احتكاكه $\varphi_{BL} = 0.4$ ؛ IV – طريق معامل احتكاكه $\varphi_{BL} = 0.2$

المركبة بسبب وصول تباطؤ الدولاب الزاوي $\frac{d\omega}{dt}$ مقادير كبيرة ، فى حين يتأخر انقفـــال الدواليب على الطرق ذات معامل احتكاك عال $\varphi = 0.8$ و $\varphi = 0.6$. ويتضح كذلك من

الشكل منحنيات سرعة المركبة والسرعة الدورانية للدولاب . وبهذا يؤمن استعمال النموذج الرياضي إمكانية حساب المعالم المختلفة لحركة كل من الدولاب ومركبة النقل .

Mathematical model for motion of the wheel of transport vehicle

Salman A. H.*

Abstract

This paper tries to write mathematical model for motion of the wheel of transport vehicle. It includes the mathematical simulation of the different forces and moments acting on the wheel and vehicle for different forms of motion, as well as modeling the coefficient of friction between the wheel–tyre and the road surface.

This model has been programmed using FORTRAN-77 language, rendering it useful in calculating different variables and parameters of the motion of both vehicle and wheel simultaneously.

المراجـــــــع

Beer F. P., Johnston E. R.1990.Vector mechanics for engineers – dynamics, 2nd metric edition, McGraw-Hill, Singapore, P 787.

Grishkevich A. I.1986. Theory of automobiles, Vishaia Shcola, Minsk p. 10 .

Katsuhiko Ogata. 1982. Modern Control Engineering, Prentice-Hall of I India, p 69, .

زرتي ، عمر 1996، الطرق العددية باستخدام فورتران ، منشورات ELGA ، ص 174 .

هليل ، سلمان عبيد 1997، نظرية السيارات ، المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم ، تونس ، ص 33 .

* Omar Al- Mukhtar University Faculty of Engineering Beida – Libya