نظرية لوجود حل وحيد موضعياً لمعادلات فولترا (التكاملــ – التفاضلية اللاخطية) من الرتبة الأولى

عبد السلام عبد المولى بوجلدين*

DOI: https://doi.org/10.54172/mjsc.v18i1.800

الملخـــــص

في هذا البحث أقدم نظريتي وجود حل وحيد موضعيا ، أولاهما خاصة بمعادلة فولترًا التكاملــ– تفاضلية غير الخطية علي صورة الجمع الآتية :

$$x'(t) = f(t, x(t)) + \int_a^t k(t, \tau, x(\tau))d\tau \tag{0.1}$$

مع الشرط الابتدائي $x(a) = c$.

والثانية خاصة بالصورة العامة الآتية والتي تكون صورة الجمع حالة خاصة منها :

$$x'(t) = f(t, x(t), IKx), IKx = \int_a^t k(t, \tau, x(\tau))d\tau \tag{0.2}$$

مع الشرط الابتدائي $x(a) = c$.

سيكون البرهان بإثبات أن :

$$Q(x)t = c + \int_a^t f(x, x(s), IKx)ds \tag{0.3}$$

راسم تقليصي (Contraction mapping) في الفضاء المتري الآتي :

$$E = \{x(t) \in C'[a, a+\delta]\} | |x(t) - c| \le T \text{ for } t \in [a, a+\delta]\}, \tag{0.4}$$

حيث (T) عدد منته ، $\delta = \min\left((b-a), \frac{T}{M}\right)$ ،

$$M = \max(M_1 \ge | k(t, \tau, x(\tau)) |, M_2 \ge | f(t, x(t), IKx) |)$$

مع ملاحظة أن الفضاء المتري E جزئي من فضاء بناخ B المعرف كما يلي :

$$B = \{(t, \tau, u, w) | a \le t \le b, a \le \tau \le b, | u | < \infty, | w | < \infty\} \tag{0.5}$$

* قسم الرياضيات ، كلية العلوم ، جامعة عمر المختار ، البيضاء – ليبيا ، ص.ب. 919 .

حيث كل من u ، w دالة متصلة بالنسبة لمتغيراتها ، و B مزود بالمعيار الموزون الآتي والذي يعرف باسم معيار بيالسكي (Bielecki type norm) :

$$\| x \| = \max_t \left(e^{-r(t)} \mid x(t) \mid \right), t \in [a, b] \text{and } r(t) = vL(t-a) \tag{0.6}$$

لأي عددين حقيقيين منتهيين $v \geq 2$ ، $L = \max(l_1, l_2, 1)$ ، حيث l_1 هو ثابت ليبشتز للدالة $k(t, \tau, x(\tau))$ و l_2 هو ثابت ليبشتز للدالة $f(t, x(t), IKx)$.

المقدمة

في معظم البحوث العلمية نجد أنه عند التعرض لمعادلة فولترا تكامل– تفاضلية غير خطية (Nonlinear Volterra Integro-Differential Equation) يتم وضع شروط ثم فرض أن المسألة تحت تلك الشروط يكون لها حل ، أو أن تتم محاولة إثبات وجود حل لمسألة بعينها ، و إذا كان الإثبات باستخدام نظرية بناخ نجد أن الباحث يقوم بوضع الشروط والقيود على معامل التقليص (contraction factor) للمسألة قيد الدراسة حتى يصبح بين 0 ، 1 لأنه عند التعميم في الغالب نجد أن التحليل إما أن يكون صعبا جدا أو أن يكون مستحيلا ، كما أن هناك بعض النظريات المثبتة في فضاء توبولوجي على حالات خاصة . ولكن بهذه النظريات التي سأقوم بإثباتها في فضاء متري جزئي من فضاء بناخ سنجد أن التعامل مع معادلات فولترا التكامل– تفاضلية اللاخطية لإثبات وجود حل وحيد لها يكون سهل بصفة عامة و يكون أسهل بكثير عند التعامل مع المعادلات الخطية بصفة خاصة كما أن نفس النظريات ستكون قابلة للتطبيق أيضا في حالة معادلات فولترا التكامل– تفاضلية التي تكون دالة الحل فيها تعتمد على وسيط (parameter) .

نظرية 1

ليكن لدينا مسألة القيمة الابتدائية :

$$x'(t) = f(t, x(t)) + \int_a^t k(t, \tau, x(\tau)) d\tau, x(a) = c \tag{1.1}$$

ولدينا $B1$ ، $B2$ مجموعتان جزئيتان من فضاء بناخ (0.5) المزود بالمعيار الموزون (0.6) ، ونفرض أن :

1°: $k(t, \tau, x(\tau))$ دالة متصلة وتحقق شرط ليبشتز الآتي بثابت ليبشتز $l_1 > 0$ في $B1$:

$$| k(t, \tau, x) - k(t, \tau, y) | \leq l_1 | x - y | \forall (t, \tau, x), (t, \tau, y) \in B1, \tag{1.2}$$

$$B1 = \{ (t, \tau, u) a \leq t \leq b, a \leq \tau \leq b, | u - c | \leq T < \infty \} \tag{1.3}$$

$2°: f(t,x(t))$ دالة متصلة وتحقق شرط ليبشـــتز الآتي بثابت ليبشتز $l_2 > 0$ في $B2$:

$$| f(t,x) - f(t,y) | \le l_2 | x - y |, \forall (t,x),(t,y) \in B2, \tag{1.4}$$

$$B2 = \{(t,u) | a \le t \le b, | u - c | \le T < \infty\} \tag{1.5}$$

$3°$: كل من f ، k محـــدودة في نطاقهـــا أي أن :

$$| k(t,\tau,u) | \le M_1 \quad \forall (t,\tau,u) \in B1, | f(t,u) | \le M_2 \qquad \forall (t,u) \in B2 \tag{12}$$

إذا حققت مسألة القيمة الابتدائية (1.1) الشروط $1°$ ، $2°$ ، $3°$ يكون لها حل وحيد في الفضـــاء المتري (0.4) الجزئي من فضاء بناخ (0.5) المـــزود بالمعيار الموزون (0.6) .

البرهان

بإجراء التكامل من a إلى t لطـــرفي المعادلة التكامليـ–تفاضلية (1.1) نحصل على :

$$x(t) = c + \int_a^t f(\tau, x(\tau)) d\tau + \int_a^t \int_a^\tau K(\tau, s, x(s)) ds\, d\tau \tag{1.7}$$

نرمز لطرف (1.7) الأيمن بالمؤثر $Q(x)t$ لنكـــون مسألة النقطة الثابتة الآتية :

$$x(t) = Q(x)t \tag{1.8}$$

نثبت أولاً أن $Q: E \to E$ ، في E يكون لدينا :

$$| Q(x)t - c | \le \int_a^t | f(\tau, x(\tau)) | d\tau + \int_a^t \int_a^\tau K(\tau, s, x(s)) | ds\, d\tau \le$$

$$M_2 (t-a) + \tfrac{1}{2} M_1 (t-a)^2 \le M(\delta + \tfrac{1}{2}\delta^2) \le T \tag{1.9}$$

ولكي يتحقق ذلك إما أن نختار T بحيث تحقـــق $T \ge M((b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2)$ أو أن نختارهـــا حسب المسألة المعروضة .

$\therefore \quad Q: E \to E$

ولإثبات أن Q مؤثر تقليصـــي (Contraction operator) ندرس الفرق الآتي :

$$| Q(x)t - Q(y)t | = | Q(x) - Q(y) | (t) \le \int_a^t | f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau)) | d\tau +$$

$$\int_a^t \int_a^\tau | K(\tau, s, x(s)) - K(\tau, s, y(s)) | ds\, d\tau \tag{1.10}$$

باستخدام شرطي ليبشتز (1.2) و (1.4) في طرف المتباينة (1.10) الأيمن نحصل على :

$$| Q(x) - Q(y) | (t) \le l_2 \int_a^t | x(\tau) - y(\tau) | d\tau + l_1 \int_a^t \int_a^\tau | x(s) - y(s) | ds\, d\tau \tag{1.11}$$

بضرب كل حد من حدي الطرف الأيمن للمتباينة (1.11) في المقدار $e^{-vL(t-a)}e^{vL(t-a)}$ ينتج أن :

$$| Q(x) - Q(y) | (t) \le L\int_a^t | x(\tau) - y(\tau) | e^{-vL(\tau-a)}e^{vL(\tau-a)}d\tau + L\int_a^t\int_a^\tau | x(s)-y(s) | e^{-vL(s-a)}e^{vL(s-a)}ds\,d\tau \qquad (1.12)$$

خذ القيمة العظمى (max) في الطرف الأيمن كما يلي :

$$| Q(x)-Q(y) | (t) \le L\int_a^t \max_\tau(| x(\tau)-y(\tau) | e^{-vL(\tau-a)})e^{vL(\tau-a)}d\tau + L\int_a^t\int_a^\tau \max_s(| x(s)-y(s) | e^{-vL(s-a)})e^{vL(s-a)}ds\,d\tau \qquad (1.13)$$

وحسب تعريف المعيار (0.6) نحصل على :

$$| Q(x)-Q(y) | (t) \le L \| x-y \| \left(\int_a^t e^{vL(\tau-a)}d\tau + \int_a^t\int_a^\tau e^{vL(s-a)}ds\,d\tau\right) \qquad (1.14)$$

وهذه المتباينة تؤول إلى :

$$| Q(x)-Q(y) | (t) \le L \| x-y \| \int (e^{vL(\tau-a)} + \frac{1}{vL}(e^{vL(\tau-a)}-1))\,d\tau = \| x-y \| \left(\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{v^2L}\right)(e^{vL(t-a)}-1) - \frac{1}{vL}(t-a)\right) \le \| x-y \| \left(\frac{1+v}{v^2}(e^{vL(t-a)}-1)-\frac{1}{vL}(t-a)\right) \qquad (1.15)$$

اضــــرب طــــرفي (1.15) في المقــــدار $e^{-vL(t-a)}$ واحصل على :

$$e^{-vL(t-a)} | Q(x)-Q(y) | (t) \le \| x-y \| \left(\frac{1+v}{v^2}(1-e^{-L(t-a)}) - \frac{1}{vL}(t-a)e^{-vL(t-a)}\right)$$

$$\le \| x-y \| \left(\frac{1+v}{v^2}(1-\min_t e^{-vL(t-a)}) - \frac{1}{vL}\min_t((t-a)e^{-vL(t-a)})\right) \le \frac{1+v}{v^2}(1-e^{-vL\delta})\| x-y \| \qquad (1.16)$$

أي أن :

$$e^{-vL(t-a)}\,|Q(x)-Q(y)|(t)\le \frac{1+v}{v^2}(1-e^{-vL\delta})\,\|x-y\| \tag{1.17}$$

طرف المتباينة (1.17) الأيمن لا يعتمد على t ، لجميع قيم t في الفترة $[a,a+\delta]$ وبذلك لذلك فهو حد علوي للطرف الأيسر ويكون صالح يصبح :

$$\max_t(e^{-vL(t-a)}\,|Q(x)-Q(y)|(t))\le \frac{1+v}{v^2}(1-e^{-vL\delta})\,\|x-y\| \tag{1.18}$$

والتي حسب تعريف المعيار (0.6) تعطينا :

$$\|Q(x)-Q(y)\|\le \frac{1+v}{v^2}(1-e^{-vL\delta})\,\|x-y\| \tag{1.19}$$

من الواضح أن $0<\frac{1+v}{v^2}(1-e^{-vL\delta})<1$ لأي قيم منتهية $v\ge 2, L\ge 1$ وهذا يعني أن $Q(x)t$ مؤثر تقليصي (Contraction operator) .

نظرية 2

افرض أنه لدينا مسألة القيمة الابتدائية :

$$x'(t)=f(t,x(t),IKx),\, x(a)=c \tag{2.1}$$

حيث :

$$IKx:=\int_a^t k(t,\tau,x(\tau))\,d\tau \tag{2.2}$$

ولدينا $B1$ ، $B2$ مجموعتان جزئيتان من فضاء بناخ (0.5) المزود بالمعيار الموزون (0.6) ، بالإضافة إلى أن :

$1°: k(t,\tau,x(\tau))$ دالة مستمرة وتحقق شرط ليبشتز الآتي :

$$|k(t,\tau,x)-k(t,\tau,y)|\le l_1\,|x-y|,\quad \forall (t,\tau,x),(t,\tau,y)\in B1 \tag{2.3}$$

حيث $B1, l_1>0$ معرف كما يلي :

$$B1=\{(t,\tau,u)\,|\,a\le t\le b, a\le \tau\le b, |u_0-c|\le T_0<\infty\} \tag{2.4}$$

$2°: f(t,x(t),IKx)$ دالة متصلة وتحقق شرط ليبشتز :

$$|f(t,x,Iz_1)-f(t,y,Iz_2)|\le l_2(|x-y|+l_1I\,|x-y|)\quad \forall (t,x,Iz_1),\ (t,y,Iz_2)\in B2 \tag{2.5}$$

(من أجل Iz_1 ، Iz_2 انظر (2.9)) حيث $l_2>0$

$B2$ معرف بالآتي :

$$B2=\{(t,u_0,u_1)\,|\,a\le t\le b, |u_0-c|\le T_0<\infty, |u_1|\le T_1<\infty\} \tag{2.6}$$

°3 : في $B1$ و $B2$ يكون :

$$|k(t,\tau,u_0)|\le M_1 \qquad \forall(t,\tau,u_0)\in B1, |f(t,u_0,u_1)|\le M_2$$
$$\forall(t,u_0,u_1)\in B2 \tag{2.7}$$

إذا حققت مسألة القيمة الابتدائية (2.1) الشروط المتري (0.4) الجزئي من فضاء بناخ (0.5) المزود بالمعيار (0.6) حيث : 1° ، 2° ، 3° يكون لها حل وحيد في الفضاء

ملحوظة

$$I := \int_a^t (\ )d(\ ), z_1 = k(t,\tau,x), z_2 = k(t,\tau,y) \tag{2.8}$$

وباستعمال (28) نحصل على :

$$|Iz_1 - Iz_2| \le I|z_1 - z_2| \le l_1 I|x-y| \tag{2.9}$$

البرهان بتكامل طرفي المعادلة التكامل–تفاضلية (2.1) من a إلى t نحصل على :

$$x(t) = c + \int_a^t f(s, x(s), IKx)\, ds \tag{2.10}$$

نشير إلى طرف (2.10) الأيمن بالمؤثر $Q(x)t$

لنكون مسألة النقطة الثابتة الآتية :

$$x(t) = Q(x)t \tag{2.11}$$

والآن نثبت أولاً أن $Q: E \to E$. في E يكون

لدينا :

$$|Q(x)t - c| \le \int |f(s, x(s), Ikx)|\, ds \le M_2(t-a) \le M\delta \le T,$$
$$\forall a \le t \le a+\delta \tag{2.12}$$

ثانياً نثبت أن Q مؤثر تقليصي (Contraction operator) ، ولإثبات ذلك ندرس الفرق الآتي :

$$|Q(x)t - Q(y)t| = |Q(x) - Q(y)|(t) \le \int_a^t | f(x, x(s), Ikx(x)) -$$
$$f(s, y,(s), Iky(s)|\, ds \tag{2.13}$$

باستخدام شرطي ليبشتز (2.3) و (2.5) والمتباينة (2.9) في طرف المتباينة (2.13) الأيمن نحصل على :

$$|Q(x)-Q(y)|(t) \le l_2 \int_a^t \left(|x(s)-y(s)| + l_1 \int_a^s |x(\mu)-y(\mu)|\, d\mu \right) ds \qquad (2.14)$$

بضرب كل حد من حدي الطرف الأيمن للمتباينة (2.15) في المقـــدار $e^{-vL(t-a)}e^{vL(t-a)}$ ينـــتج أن :

$$|Q(x)-Q(y)|(t) \le L \int_a^t \Big(|x(s)-y(s)|\, e^{-vL(s-a)} e^{vL(s-a)} + L \int_a^s |x(\mu)-y(\mu)|\, e^{-vL(\mu-a)} e^{vL(\mu-a)} d\mu \Big) ds \qquad (2.15)$$

خذ القيمة العظمى (max) في الطـــرف الأيمـــن حسب الترتيب المبين في (2.16) أدناه :

$$|Q(x)-Q(y)|(t) \le L \int_a^t \left(\max_s (|x(s)-y(s)|\, e^{-vL(s-a)}) e^{vL(s-a)} + L \int_a^s \max_\mu (|x(\mu)-y(\mu)|\, e^{-vL(\mu-a)} e^{vL(\mu-a)} d\mu \right) ds \qquad (2.16)$$

وحسب تعريف المعيار (0.6) نحصل على :

$$|Q(x)-Q(y)|(t) \le L \|x-y\| \int_a^t \left(e^{vL(s-a)} + L \int_a^s e^{vL(\mu-a)} d\mu \right) ds \qquad (2.17)$$

وهذه المتباينة تؤول إلى :

$$|Q(x)-Q(y)|(t) \le L \|x-y\| \int_a^t \left(e^{vL(s-a)} + \frac{1}{v}(e^{vL(s-a)} - 1) \right) ds = \|x-y\| \Big(\tfrac{1+v}{v^2}(e^{vL(t-a)} - 1) - \tfrac{L}{v}(t-a) \Big) \qquad (2.18)$$

اضـــرب طـــرفي (2.18) في المقـــدار $e^{-vL(t-a)}$ واحصل على :

$$e^{-vL(t-a)} |Q(x)-Q(y)|(t) \le \|x-y\| \Big(\tfrac{1+v}{v^2}(1-e^{-vL(t-a)}) - \tfrac{L}{v}(t-a)e^{-vL(t-a)} \Big) \le \|x-y\| \left(\tfrac{1+v}{v^2}(1-\min_t e^{-vL(t-a)}) - \tfrac{L}{v}\min_t((t-a)e^{-vL(t-a)}) \right) \le \tfrac{1+v}{v^2}(1-e^{-vL\delta}) \|x-y\| \qquad (2.19)$$

أي أن :

$$e^{-vL(t-a)} |Q(x)-Q(y)|(t) \le \tfrac{1+v}{v^2}(1-e^{-vL\delta}) \|x-y\| \qquad (2.20)$$

طرف المتباينة (2.20) الأيمن لا يعتمد علـــى t ، لجميع قـــيم t في الفتـــرة $[a, a+\delta]$ وبـــذلك لذلك فهو حد علوي للطرف الأيسر ويكون صالح يصبح :

$$\max_t (e^{-vL(t-a)} \mid Q(x)-Q(y) \mid (t)) \le \tfrac{1+v}{v^2}(1-e^{-vL\delta}) \parallel x-y \parallel \qquad (2.21)$$

والتي حسب تعريف المعيار (0.6) تعطينا :

$$\parallel Q(x)-Q(y) \parallel \le \tfrac{1+v}{v^2}(1-e^{-vL\delta}) \parallel x-y \parallel \qquad (2.22)$$

من الواضح أن $0 < \tfrac{1+v}{v^2}(1-e^{-vL\delta}) < 1$ وهـــذا يعني أن $Q(x)t$ مؤثر تقليصـــي (contraction operator) لأي قيم منتهية $v \ge 2, L > 0$ ، ولكن لكي نضمن أن تكون نظرية 1 حالة خاصة مـــن نظرية 2 نضع الشرط $(1 \le L < \infty)$.

لتوضيح استخدام هاتان النظريتان تقدم فيما يلي تطبيق على بعض المعادلات التكاملـــ – تفاضلية من الرتبة الأولى .

مثال 1

تطبيق نظرية 1 على المعادلة التكاملـــ – تفاضلية :

$$x'(t) = 1 - \int_0^t t^3 (x(\tau)-\tau)^2 \, d\tau, t \in [0,1]$$

مع الشرط الابتدائي $x(0)=0$.

الحل

هذه المعادلة مع الشرط الابتدائي مكافئة للمعادلة التكاملية الآتية :

$$x(t) \equiv t - \int_0^t \int_0^\tau \tau^3 (x(s)-s)^2 \, ds \, d\tau$$

وبهذا فإن المؤثر $Q(x)t$ يكون على الصورة :

$$Q(x)t \equiv t - \int_0^t \int_0^\tau \tau^3 (x(s)-s)^2 \, ds \, d\tau$$

نختار عدد منته T ونكون المجموعتين :

$$B1 = \{(t, \tau, x(t)) \mid 0 \le t \le 1, 0 \le \tau \le 1, \mid x(t)-0 \mid \le T\},$$

$$B2 = \{(t, x(t)) \mid 0 \le t \le 1, \mid x(t) \mid \le T\}$$

°1 : واضح أن : $k(t, \tau, x(\tau)) = t^3 (x(\tau)-\tau)^2$ دالة متصلة وتحقق شرط ليبتز الآتي في $B1$:

$$\mid k(t,\tau,x(\tau)) - k(t,\tau,y(\tau)) \mid = \mid t^3 (x(\tau)-\tau)^2 - t^3 (y(\tau)-\tau)^2 \mid \le$$
$$2T \mid x(\tau)-y(\tau) \mid, \qquad \forall (t,\tau,x),(t,\tau,y) \in B1$$

إذن $l_1 = 2T$.

2°:1 $f(t,x(t))=1$ دالة متصلة في $B2$ ، ولأنها $l_2=0$ ، وبـــــــــــــذلك يكـــــــــــــون دالة ثابتة فهي تحقق شرط ليبشتز بثابـــت ليبشـــتز $L=\max(l_1,l_2,l)=2T$.

3°:1 $\forall(t,\tau,x(\tau))\in B1$ $\quad |k(t,\tau,x(\tau))|=|t^3(x(\tau)-\tau)^2|\le T^2+1$

$|f(t,x(t))|=1 \qquad \forall(t,x(t))\in B2, M=\max(1,(T^2+1))=(T^2+1)$

$$\delta=\min\left(1,\frac{T}{(T^2+1)}\right)=\frac{T}{(T^2+1)}$$

والفضاء المتري E"(0.4)" الجزئي من فضاء بناخ B"(0.5)" يصبح :

$$E=\left\{x(t)\in C'\left[0,\frac{T}{(T^2+1)}\right]|\,x(t)|\le T \text{ for } t\in\left[0,\frac{T}{(T^2+1)}\right]\right\}$$

والمعيار الموزون (0.6) يكون على الصورة :

$$\|x\|=\max_t(e^{-2vTt}\,|x(t)|),t\in[0,1]$$

لأي عدد حقيقي منتهي $v\ge 2$.

في E يكون :

$$|Q(x)t|\le|t|+(T^2+1)\left(\tfrac{t^2}{2}\right)\le\delta+(T^2+1)\left(\tfrac{\delta^2}{2}\right)\le T$$

لأي عدد منته $\frac{1}{2}\le T$ ، وباختيار $v=2$ نحصل على :

$$\|Q(x)-Q(y)\|\le\tfrac{3}{4}\left(1-e^{-\frac{4T^2}{(T^2+1)}}\right)\|x-y\|$$

ملحوظة

في الحقيقة نجـــد أن : $0<\frac{3}{4}(1-e^{-4T})<1$ لأي عدد منته $\frac{1}{2}\le T$ وهذا يعني أن النظرية تضـــمن وجود الحل الوحيد لجميع قيم t في الفتر [0, 1] .

إذا استخدمنا :

$$|k(t,\tau,x(\tau))|=|t^3(x(\tau)-\tau)^2|\le T^2 \qquad \forall\, t,\tau\in[0.1]$$

فإن $\delta=\frac{1}{T}$ ويكون :

$$|Q(x)t|\le\delta+T^2\left(\tfrac{\delta^2}{2}\right)\le T \qquad \forall T\ge\tfrac{1+\sqrt{17}}{4}$$

وعامل التقليص يصبح $\frac{3}{4}(1-e^{-4})$ ، لا يعتمـــد على δ وبذلك فإن عامل التقليص هـــذا يكـــون صالح لجميع قيم t في الفترة $[0,1]$.

مثال 2

تطبيق نظرية 2 علـــى مســـألة القيمـــة الابتدائية في مثال 1 السابق .

الحـــل

نختار عدد منته T_0 ونكون :

$$B1=\{(t,\tau,x(t))\,|\,0\le t\le 1, 0\le \tau\le 1, |x(t)-0|\le T_0\}$$

فنجد أن :

$$|IKx|=|\int_0^t t^3(x(\tau)-\tau)^2\,d\tau|\le T_0^2+1$$

وبذلك يكون :

$$B2=\{(t,IKx(t))\,|\,0\le t\le 1, |IKx(t)|\le T_0^2+1=T_1\}$$

°1 : واضح أن : $k(t,\tau,x(\tau))=t^3(x(\tau)-\tau)^2$ دالة متصلة في $B1$ وتحقق شـــرط ليبشـــتز الآتي بثابت ليبشتز $l_1=2T$:

$$|k(t,\tau,x(\tau))-k(t,\tau,y(\tau))|\le 2T\,|x(\tau)-y(\tau)|,\qquad \forall (t,\tau,x),(t,\tau,y)\in B1$$

$$f(t,x(t),IKx)=1-\int_0^t t^3(x(\tau)-\tau)^2\,d\tau:°2$$

دالة متصلة في $B2$ ، وتحقق شرط ليبشتز كما يلي بثابت ليبشتز $L=\max(l_1,l_2,l)=2T, l_2=2T$

$$|f(t,x,Iz_1)-f(t,y,Iz_2)|=|1-IKx-1+IKy|\le 2TI\,|x(\tau)-y(\tau)|$$
$$\forall (t,x,Iz_1),(t,y,Iz_2)\in B2$$
$$|k(t,\tau,x(\tau))|=|t^3(x(\tau)-\tau)^2|\le T_0^2+1\qquad \forall (t,\tau,x(\tau))\in B1:°3$$
$$|f(f,x(t),IKx)|=|1-\int_0^t t^3(x(\tau)-\tau)^2\,d\tau|\le T_0^2,$$
$$M=\max((T_0^2+1),T_0^2)=(T_0^2+1), T=\min((T_0^2+1),T_0)=T_0,$$
$$\delta=\min\left(1,\frac{T_0}{(T_0^2+1)}\right)=\frac{T_0}{(T_0^2+1)}$$

والفضاء المتري E "(0.4)" الجزئي من فضاء بناخ B "(0.5)" يصبح :

$$E=\left\{x(t)\in C'\left[0,\frac{T_0}{(T_0^2+1)}\right]\,|\,x(t)|\le T \text{ for } t\in\left[0,\frac{T_o}{(T_0^2+1)}\right]\right\}$$

والمعيار الموزون (0.6) يكون على الصورة :

$$\| x \| = \max_t (e^{-2vTt} \mid x(t) \mid), t \in [0,1]$$

لأي عدد حقيقي منتهي $v \geq 2$. وفي E يكون :

$$| Q(x)t | \leq | t | + (T_0^2 + 1)\left(\tfrac{t^2}{2}\right) \leq \delta + (T_0^2 + 1)\left(\tfrac{\delta^2}{2}\right) \leq T_0$$

لأي عدد منته $\frac{1}{2} \leq T_0$ ، وباختيار $v = 2$ نحصل على :

$$\| Q(x) - Q(y) \| \leq \tfrac{3}{4}(1 - e^{-\frac{4t_0}{(t_0^2+1)}}) \| x - y \|$$

ملحوظة : أيضاً هنا نجد أن عامل التقليص يحقق : $0 < \frac{3}{4}(1 - e^{-4T}) < 1$ لأي عدد منته $\frac{1}{2} \leq T$ إذا استخدمنا : وهذا يعني أن النظرية تضمن وجود الحل الوحيد لجميع قيم t في الفترة [0, 1] .

$$| k(t, \tau, x(\tau)) | = | t^3 (x(\tau) - \tau)^2 | \leq T_0^2 \qquad \forall t, \tau \in [0,1]$$

فإن $\delta = \dfrac{1}{T_0}$ ويكون :

$$| Q(x)t | \leq \delta + T_0^2 \left(\tfrac{\delta^2}{2}\right) \leq T_0 \quad \forall T_0 \geq \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$$

وعامل التقليص يصبح $\frac{3}{4}(1 - e^{-4})$:

مثال 3 تطبيق نظرية 1 على مسألة القيمة الابتدائية الآتية :

$$x'(t) = 1 + 2t - x(t) + \int_0^t t(1 + 2t)e^{\tau(t-\tau)} d\tau \; t \in [0,1], x(0) = 1$$

الحل في الفترة [0, 1] فيمكن أن نختار العدد المنتهي $9 \leq T$ فيما يلي : بما أن :

$$| k(t, \tau, x(\tau)) | = | t(1 + 2t)e^{\tau(t-\tau)} | \leq 3e$$

$$B1 = \{(t, \tau, x(t)) \mid 0 \leq t \leq 1, 0 \leq \tau \leq 1, x(t) - 1 | \leq T\}$$

$$B2 = \{(t, x(t)) \mid 0 \leq t \leq 1, | x(t) | \leq T\}$$

°1 : واضح أن :

$$k(t, \tau, x(\tau)) = t(1 + 2t)e^{\tau(t-\tau)}$$

دالة متصلة وتحقق شرط ليبشـتز في $B1$ بثابـت ليبشتز $l_1 = 0$.

°2 : $f(t, x(t)) = 1 + 2t - x(t)$ دالة متصلة في $B2$ وتحقق شرط ليبشتز كما يلي :

$$| f(t, x(t)) - f(t, y(t)) | \leq | x(t) - y(t) |$$

مـــن الواضـــح أن $l_2 = 1$ ، وبـــذلك يكـــون $L = \max(l_1, l_2, l) = 1$ ،

$$| f(t, x(t)) | = | 1 + 2t - x(t) | \leq | 1 + 2 - T - 1 | \leq T - 2 < T \quad \forall (t, x(t)) \in B2$$

إذاً $M = \max(T, T-2) = T$ ، ونجـــــــد أن $\delta = \min\left(1, \dfrac{T}{T}\right) = 1$ والفضاء المتري E الجزئي من فضاء بناخ B يصبح :

$$E = \{x(t) \in C'[0,1] \,||\, x(t) | \leq T \text{ for } t \in [0,1]\}$$

وعليه فإن :

$$| Q(x)t - 1 | \leq 1 + 1 + T\left(\tfrac{1}{2}\right) < T$$

أي أن $Q : E \to E$ ولـــه معامـــل تقلـــيص $\frac{3}{4}(1 - e^{-2L\delta}) \leq \frac{3}{4}(1 - e^{-2})$ أي أن النظريـــة تضمن وجود الحل الوحيد لجميع قيم t في الفترة [0, 1] لأي عدد منته $0 < T$.

مثال 4

تطبيق نظرية 2 علـــى مســـألة القيمـــة الابتدائية في مثال 3 السابق .

$$x'(t) = 1 + 2t - x(t) + IKx$$

حيث :

$$IKx = \int_0^t t(1 + 2t) e^{\tau(t - \tau)} d\tau, t \in [0,1], x(0) = 1$$

الحـــل

نلاحظ أن :

$$| k(t, \tau, x(\tau)) | = | t(1 + 2t) e^{\tau(t-\tau)} | \leq 3e$$

في الفترة [0, 1] لذلك يمكن أن نختار العدد المنتهي $3e \leq T_0$ والعدد المنتهي $3e \leq T_1$ فيما يلي :

$$B1 = \{(t, \tau, x(t)) \,|\, 0 \leq t \leq 1, 0 \leq \tau \leq 1, | x(t) - 1 | \leq T_0\}$$

$$B2 = \{(t, x(t), IKx(t)) \,|\, 0 \leq t \leq 1, | x(t) - 1 | \leq T_0, | IKx(t) | \leq T_1\}$$

°1 : واضح أن $k(t, \tau, (\tau)) = t(1 + 2t) e^{\tau(t-\tau)}$ دالة متصلة وتحقق شرط ليبشـتز في $B1$ بثابـت ليبشتز $l_1 = 0$.

°2 : $f(t, x(t), IKx)$ دالـــة متصـــلة في $B2$ وتحقق شرط ليبشتز كما يلي :

$$| f(t, x(t), IKx) - f(t, y(t), IKy) | \leq | x(t) - y(t) |$$

إذاً $l_2=1$ ، وبذلك يكون

$$L=\max(l_1,l_2,l)=1$$

إذاً $T=\min(3e,3e)=3e$ ،

. $M=\max(3e,2)=3e$

وبذلك يكون لدينا $\delta=\min\left(1,\frac{3e}{3e}\right)=1$.

وعليه فإن :

$$|Q(x)t-1|\le 1+1+T\left(\tfrac{1}{2}\right)<T, T\ge 3e$$

أي أن $Q:E\to E$ ويكون راسم تقليصي بمعامل تقليص q حيث :

$$q=\tfrac{3}{4}(1-e^{-2L\delta})\le \tfrac{3}{4}(1-e^{-2})$$

°3 : في $B2$ يكون :

$$|f(t,x(t),IKx)|\le|1+2t-3e-1+3et|\le 2$$

الفضاء المتري E الجزئي من فضاء بناخ B يصبح :

$$E=\{x(t)\in C'[0,1]\,||\,x(t)|\le T \text{ for } t\in[0,1]\}$$

مثال 5

تطبيق نظرية 2 على مسألة القيمة الابتدائية الآتية :

$$x'(t)=e^t+(x(t)-e^t)^2\int_0^t t^3e^\tau x^2(\tau)\,d\tau, t\in[0,1], x(0)=1$$

$$IK=\int_0^t t^3e^\tau x^2(\tau)d\tau$$

الحل

نلاحظ أن :

نختار عدد منته T_0 ونكون المجموعة $B1$ الآتية :

$$B1=\{(t,\tau,x(t))\,|\,0\le t\le 1, 0\le\tau\le 1, |x(t)-1|\le T_0\}$$

فنجد أن $|k(t,\tau,x(\tau))|\le(T_0+1)^2e$ وبذلك يكون :

$$B2=\left\{(t,x(t),IKx(t))\,|\,0\le t\le 1, |x(t)-1|\le T_0, |IKx(t)|\le(T_0+1)^2e=T_1\right\}$$

ليبشتز الآتي في $B1$:

$$|k(t,\tau,x(\tau))-k(t,\tau,y(\tau))|=|t^3e^\tau x^2(\tau)-t^3e^\tau y^2(\tau)|\le$$

$$2(T_0+1)e|x(\tau)-y(\tau)|$$

إذن $l_1=2(T_0+1)e$

$$e^t+(x(t)-e^t)^2\int_0^t t^3e^\tau x^2(\tau)\,d\tau : °2$$

دالة متصلة في $B2$ وتحقق شرط ليبشتز كما يلي :

$$|f(t,x(t),Iz_1)-f(t,y(t),Iz_2)|\le|f(t,x(t),IKx)-f(t,y(t),IKx)|+$$

$$| f(t, y(t), IKx) - f(t, y(t), IKy) | \le | [(x(t)-e^t)^2 - (y(t)-e^t)^2] IKx | +$$
$$| (y(t)-e^t)^2 \left[IKx - IKy\right] | \le 2(T_0+1)^3 e \, | x(t) - y(t) | +$$
$$(T_0+1)^2 l_1 I \, | x(t) - y(t) | \le 2(T_0+1)^3 e \left(| x(t) - y(t) | + l_1 I \, | x(t) - y(t) | \right)$$

إذاً $l_2 = 2(T_0 \_ 1)^3 e$.

$$| f(t, x(t), IKx) | = | e^t + (x(t)-e^t)^2 \int_0^t t^3 e^\tau x^2(\tau) d\tau | \le$$
$$e + T_0^2 (T_0+1)^2 e \le (T_0+1)^4 e$$

إذا :

$$M = \max((T_0+1)^2 e, (T_0+1)^4 d) = (T_0+1)^4 e, T = \min((T_0+1)^2 e, T_0) = T_0,$$
$$L = \max(2(T_0+1)e, 2(T_0+1)^3 e) = 2(T_0+1)^3 e, \delta = \min\left(1, \frac{T_0}{(T_0+1)^4 e}\right) = \frac{T_0}{(T_0+1)^4 e}$$

والفضاء المتري E الجزئي من فضـــاء بنـــاخ B يصبح :

$$E = \left\{ x(t) \in C' \left[0, \frac{T_0}{(T_0+1)^4 e}\right] || x(t) | \le T_0 \text{ for } t \in \left[0, \frac{T_0}{(T_0+1)^4 e}\right] \right\}$$

نثبت فيما يلي أن $Q : E \to E$

$$| Q(x)t - 1 | \le \int_0^t | e^\tau + (x(\tau)-e^\tau)^2 \int_0^\tau \tau^3 e^s x^2(s) \, ds \, | \, d\tau \le$$
$$\int_0^t | e^\tau + (x(\tau)-e^\tau)^2 (T_0+1)^2 e\tau \, | \, d\tau \le e^t - 1 + \tfrac{1}{2} e T_0^2 (T_0+1)^2 t^2 \le$$
$$e + \tfrac{1}{2} e T_0^2 (T_0+1)^2 \delta^2 < T_0$$

أي أن $Q : E \to E$ ويكون راسم تقليصي ولـــه معامل التقليص الآتي :

$$q = \tfrac{3}{4}(1 - e^{-2L\delta}) = \tfrac{3}{4}\left(1 - e^{\frac{-4T_0}{(T_0+1)e}}\right)$$

لاحظ أنه لجميع قيم t في الفتـــرة [0, 1] عامـــل التقليص يأخذ الصورة الآتية : $0 < \tfrac{3}{4}(1 - e^{-4(T_0+1)^3 e}) < 1$ لأي عـــدد منتـــه $0 < T_0$ وهذا يعني أن النظرية تضمن وجود الحل الوحيد عامة وليس موضعياً .

الخلاصة

أصبح من السهل إثبات وجـود الحـل الوحيد في الفضاء المتري :

$$E = \{x(t) \in C'[a, a+\delta] \,|\, |x(t)| \le T \text{ for } t \in [a, a+\delta]\}$$

المكون من مجموعة الدوال المتصلة والمحدودة على الفترة $[a, a+\delta]$ الجزئية من الفترة $[a,b]$ حيث أن دالة المسافة المعرفة في هذا الفضاء المتري هي معيار بيالسكي ، وهذا المعيار جعل معامل التقليص $\frac{v}{v^2+1}(1-e^{-vL\delta})$ يكون بين 0 ,1 في الفضاء المتري E وفي الحقيقة وجدنا أن معامل التقليص يحقق $0 \le \frac{v}{v^2+1}(1-e^{-vL(b-a)}) \le 1$ لأي عدد منته $\beta \le T$ ، (β يتم تحديدها في المسألة قيد الدراسة) ، ولأي t في الفترة $[a,b]$ وتأكد هذا فعلاً في الأمثلة التي عرضت . ذلك يعني أن النظرية تضمن وجود الحل الوحيد لجميع قيم t في الفترة $[a,b]$ وليس فقط موضعياً في الفترة $[a, a+\delta]$.

Existence and Uniqueness Theorem for Voltera Equation First Order

Abd El-Salam Bo-Geldain*

Abstract

In this paper I introduced two theorems for the local existence of a unique solution, one for Nonlinear Volterra Integro-Differential Equation in the additive form $x'(t) = f(t, x(t)) + \int_a^t k(t, \tau, x(\tau))\, d\tau$, and the other for the general form $x'(t) = f(t, x(t), IKx)$; where $IKx = \int_a^t k(t, \tau, x(\tau))\, d\tau$, with the i.c. $x(a) = c$ and $t \in [a, b]$.

The proof is done by proving that the following operator:

$Q(x)t = c + \int_a^t f(\tau, x(\tau), IKx)\, d\tau$, with $IKx = \int_a^\tau k(\tau, s, x(s))\, ds$, is a contraction mapping in the metric space:

$E = \{x(t) \in C'[a, a+\delta] \,||\, (t) - c| \le T \text{ for } t \in [a, a+\delta]\}$; where $\delta = \min\left((b-a), \frac{T}{M}\right)$ and $M = \max(M_1 \ge |k(t, \tau, x(\tau))|, M_2 \ge |f(t, x(t), IKx)|)$; noting that E is a subset of the Banach space B given by:

$B : a \le t \le b, a \le \tau \le b, |u| < \infty, |W| < \infty$, each of u and w is a continuous function in its arguments, and B is equipped with the following weighted norm which is known as bielecki's type norm:

$\| x \| = \max_t (e^{-r(t)} \,|\, x(t) \,|), t \in [a, b] \text{ and } r(t) = vL(t-a)$ for any finite numbers $v \ge 2$ and $L = \max(l_1, l_2, l)$ such that l_1 is the Lipschitz's coefficient of $k(t, \tau, x(\tau))$ and l_2 is the Lipschitz's coefficient of $f(t, x(t), IKx)$. By using the above mentioned norm, I concluded that $Q(x)t$ is contractive on the following form:

$\| Q(x) - Q(y) \| \le \frac{1+v}{v^2}(1 - e^{-vL\delta}) \| x - y \|$

Which reveals that the contraction coefficient $\frac{1+v}{v^2}(1 - e^{-vL(b-a)})$ is in (0, 1) $(0,1) \quad \forall t \in [a, b]$; whence the existence of a unique solution is guaranteed globally if we can guarantee that $Q : E \to E \qquad \forall t \in [a, b]$. Indeed we got this result for all the examples.

* Dep. of Mach.

المراجـــــع

A. A. Bojeldain, On the numerical solving of Nonlinear Volterra Integro-Differential Equations, Annales Univ. Sci. Budapest Sect. Compo XI (1991), pp. 105-125.

Bielescki A., Ramarks on the applications of the Banach- Kantorowich-Tichonoff method for the equation S= *f (x,y,z,p,q),* Acad. Polon. Bull. Sci. IV No.5, (1956) , pp. 259-262.

Janko B., The solving of the nonlinear operational equations in Banach spaces, Monograph in Romanian, Publishing house of the the Romanian academy, (1969).

Pierre Pouzet, Method d'Integration Numerique des Equations Integrales et Integro-Differentielles du Type Volterra de Seconde Espece formulas de Runge-Kutta , Symposium on The Numerical Treatment of ODE's, Integral, and Integro-Differential Equations, Rome (1960), pp. 362-368.

Peter Linz , Analytical and Numerical methods for Volterra Equations, Siam Studies in Applied Mathematics, (1985).

Hutson V. and J. S. Pym, Application of Functional Analysis and Operator Theory, Academic press, (1980).